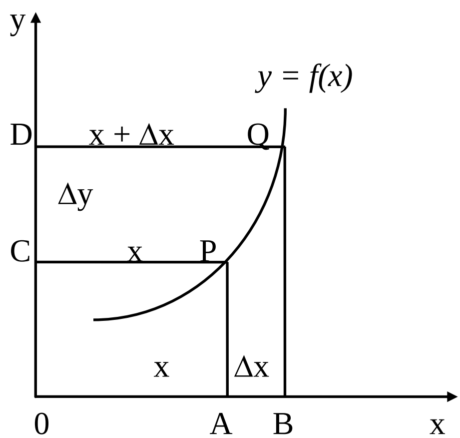
٨- حساب التفاضل DIFFERENTIAL CALCULUS

٨-١ المشتقة الأولى للدالة

إذا كانت $y = f(x)$ هي دالة معرفة خلال فترة معينة:



فإذا أخذنا قيمتين اختياريتين للمتغير المستقل x في منطقة تعريف الدالة مثل النقطة A على محور السينات ويرمز لها بالرمز x والنقطة B ويرمز لها بالرمز $x + \Delta x$ حيث Δx هي الكمية التي تغير بها المتغير المستقل x في انتقاله من القيمة الأولى إلى القيمة الثانية ويطلق عليه اسم الزيادة في المتغير المستقل.

والقيمتين: $x , x + \Delta x$ للمتغير المستقل تناظرهما قيمتين محددتان للدالة هما:

$$y , y + \Delta y$$

فإذا كانت القيمة الابتدائية للدالة هي:

$$y = f(x)$$

فإن قيمتها المتغيرة تكون:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

وبالطرح نحصل على الزيادة في الدالة y نتيجة للزيادة Δx في x

$$\therefore\ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ولإيجاد متوسط معدل التغير الحادث في الدالة في الفترة (y) بالنسبة إلى x في الفترة $(x , (x + \Delta x))$ توجد النسبة $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ حيث أنها مقياس لسرعة تغير الدالة في هذه الفترة فنجد أن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

وحيث أن Δy تعتمد على Δx فإن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تعتمد أيضاً على Δx وبذلك عندما تؤول Δx إلى الصفر فإن Δy تؤول إلى الصفر أيضاً وتقترب $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ من نهاية محددة عندما تؤول Δx إلى الصفر ويرمز لهذه النهاية بالرمز $f'(x)$ أو y' أو $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{df(x)}{dx}$ أو Dy أو Df :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ويطلق على هذه النهاية اسم المشتقة أو المعامل التفاضلي الأول للدالة المعطاة عند x والمعنى الطبيعي لهذه النهاية هو معدل تغير الدالة $f(x)$ بالنسبة لتغيرها المستقل عند قيمة معينة x ... وعملية إيجاد المشتقة الأولى أو بمعنى آخر إيجاد معدل التغير في y بالنسبة إلى x هي عملية التفاضل، ولإيجاد المشتقة الأولى لأي دالة متصلة يجب إتباع الخطوات الآتية :

١- تعطى المتغير x تغيراً مقداره Δx فتأخذ y تغيراً مناظراً Δy.

٢- نوجد الزيادة Δy للدالة بطرح المعادلة الأصلية من المعادلة الناتجة من (١).

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

٣- توجد متوسط التغير $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ في الدالة بقسمة الزيادة Δy التي حصلنا عليها على Δy.

٤- توجد نهايتي الطرفين عندما تؤول Δx إلى الصفر فنحصل بذلك على معدل التغير المطلوب $\frac{dy}{dx}$

مثال (٨-١): أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = \sqrt{x}$ عندما $x > 0$

<u>الحـــــــــل</u>

$$1- \quad y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$2- \quad \therefore \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$3- \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

ويمكن كتابتها على الصورة:

$$\left(\frac{x^n - a^n}{x - a}\right)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{(x + \Delta x) - x}$$

$$4- \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{(x + \Delta x) \to x} \frac{(x + \Delta x)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{(x + \Delta x) - x}$$

$$= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

<u>ملحوظة:</u>

لاحظ أن الرمز $\frac{dy}{dx}$ ليس معناه خارج قسمة مقدارين .. إنما يقصد بـــه الدلالة على المشتقة ، أي نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ككل لذلك يجب اعتباره وحدة واحدة وليس كسراً يمكن فصل بسطه عن مقامه.

٨-١-١ السرعة : The velocity

نفرض أن أي جسم يتحرك يخضع في حركته إلى العلاقة:

$$s = f(t)$$

حيث أن" s "هي المسافة ، "t "هي الزمن وهما الكميتان الأساسيتان الممكن قياسهما والمطلوب إيجاد سرعة الجسم في لحظة ما "t "فمن العلاقة السابقة نجد أنه في الزمن "t"يحتل الجسم الموضع "s "بحيث :

$$s = f(t)$$

وفي الزمن $t + \Delta t$ يكون الجسم في الموضع :

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t)$$

وعلى هذا ففي الفترة من t إلى $t + \Delta t$ يكون الجسم قد انتقل مسافة قدرها:

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ونعرف أن السرعة المتوسطة Average velocity هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

$$V_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

وتكون السرعة اللحظية عند الزمن t هي نهاية السرعة المتوسطة عندما $\Delta t \to 0$ ، أي أن:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ومن تعريف المشتقة ينتج أن :

$$V = \frac{ds}{dt}$$

مثـــال (٨-٢) : أوجد سرعة جسم سقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية

الحـــل

حيث أن الجسم الساقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية يخضع للعلاقة التالية :

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

حيث أن s : المسافة ، t : الزمن ، g : عجلة الجاذبية الأرضية .

والسرعة هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن $V = \dfrac{ds}{dt}$

$$\therefore s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2$$

$$\therefore \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t}$$

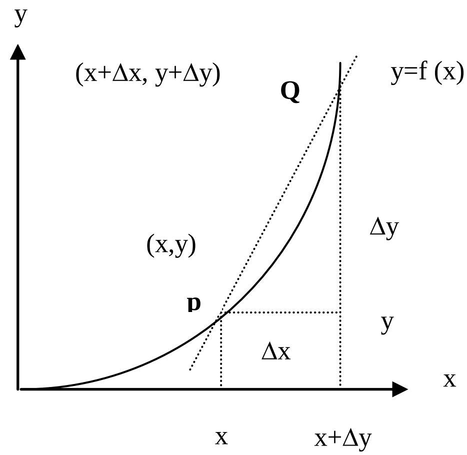
$$V = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} g [(t + \Delta t)^2 - t^2]}{(t + \Delta t) - t}$$

$$= \frac{1}{2} g . 2t = gt$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = gt$$

٨-١-٢ المعنى الهندسي للمشتقة الأولى :

The Geometric meaning of the Derivative



إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة في مدى معين ورسمنا منحنى هذه الدالة $y = f(x)$ بيانياً، ثم أخذنا على كل منحنـــى نقطتـــين متجاورتين

$$P(x,y)\ ,\ Q(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$$

فإذا رسمنا القاطع **PQ** فإن زاوية ميـــل هذا القاطع مع الاتجاه الموجـــب لمحـــور السينات هي الزاوية (θ) التي ظلها:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أي أن ميل القاطع:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وإذا اقتربت Δx من الصفر فإن النقطة **Q** تقترب على المنحنى من النقطة **P** ويدور القاطع حول النقطة **P** ويصبح مماساً للنقطة **P** عندما تؤول Δx للصفر وتتغير بالتالي الزاوية θ لتصل إلى نهاية معينة **P** عندما $\Delta x \to 0$، وبذلك يمكن القول أنه عندما $\Delta x \to 0$ ينطبق القاطع **PQ** على المماس للمنحنى عند النقطـــة **P** الذي ميله **tanϕ** ومن هذا يكون:

$$\tan\phi = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

أي أن قيمة المشتقة $\frac{dy}{dx}$ عند قيمة معينة **x** تســـاوى ميـــل المماـــس منحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة **(x , y)** .

مثـــــــــال (٨-٣) :

أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^2 + 3$ عند النقطة $P\ (1,4)$

الحـــــــــل

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2+3$$
$$\Delta y=(x+\Delta x)^2+3-x^2-3=(x+\Delta x)^2-x^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$
$$\therefore \tan\phi=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{(x+\Delta x)-x}=2x$$

∴ميل المماس $\therefore \quad \tan\phi=2x$

ميل المماس عند النقطة **P (1,4)** هو:

$$\tan\phi=f'(1)=2\times 1=2$$

٨–٢ القوانين الأساسية للتفاضل:

The fundamental laws of differentiation

أولاً : مشتقة الدالة الثابتة تساوى صفراً عند أي نقطة x (تفاضل أي مقدار ثابت يساوي صفر) فإذا كانت y = c حيث c مقدار ثابت ، فهذا يعنى ثبوت y مهما زادت x أي أنه للزيادة Δx في x تكون الزيادة Δy مساوية الصفر، ومنها:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=o$$
$$\therefore \frac{d}{dx}(c)=0$$

وهذا يعنى أن الدالة y = c تعبر عن مستقيم يوازي محور x وميله يساوى صفر

ثانياً: مشتقة الدالة $y=x^n$ حيث n عدد حقيقي موجب أو سالب جذري أو غير جذري.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x)^n=n(x)^{n-1}$$

ويمكن إثبات ذلك باستخدام الخطوات الأربع السابق شــرحها لإيجــاد المشــتقة الأولى.

ثالثاً: مشتقة حاصل ضرب ثابت ودالة $y = c.\ f(x)$ حيث c مقدار ثابت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[c.f(x)] = c.\frac{d}{dx}.f(x)$$

أي أن المعامل الثابت يمكن سحبه خارج علامة التفاضل ويمكن إثبات هذه القاعدة باستخدام الخطوات الأربع السابق شرحها لإيجاد المشتقة الأولى بالمبادئ الأولية.

رابعاً: مشتقة مجموع عدد محدود من الدوال تساوى المجموع المناظر لمشتقات الدوال. فإذا كانت:

$$y = u(x) + v(x) + w(x)$$

حيث أن جميع الدوال قابلــة للتفاضــل فــي فتــرة معينــة للمتغيــر (x)عنــد القيمة$(x+\Delta x)$ يكون:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w)$$

$$\therefore \Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

مثال (٨-٤) : أوجد مشتقة الدالة:

$$y = 12x^3 - 6x^2 + 5x + 9$$

الحـــــل

$$\frac{dy}{dx} = 12 \times 3x^2 - 6 \times 2x + 5 \times 1 + 0$$

$$= 36x^2 - 12x + 5$$

مثال (٨-٥) : أوجد مشتقة الدالة:

$$y = \frac{3}{x^2} - 2\sqrt{x} + 7$$

<u>**الحــــــــل**</u>

$$\frac{dy}{dx} = 3(\frac{-2}{x^3}) - 2(\frac{1}{2\sqrt{x}}) + 0$$

$$= -\frac{6}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

<u>خامساً:</u> مشتقة حاصل ضرب دالتين:

الدالة الأولى مضروبة في مشتقة الثانية + الدالة الثانية مضروبة في مشتقة الأولى. أي أن :

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

لإثبات ذلك نتبع خطوات إيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية كما يلي:

نفرض أن:

$$y = uv$$

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

$$= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

حيث أن u , v لا تعتمد على Δxوالحد الأخير في الطرف الأيمن عبارة عن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وتكون $u= f(x)$ دالة قابلة للتفاضل ومستمرة وبالتالي فإن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0 \quad , \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \neq \infty$$

وبذلك فإن هذا الحد الأخير يكون مساوياً للصفر ونحصل على

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{\frac{d(uv)}{dx}}{uv} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} + \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

وهذا الإثبات يوصلنا إلى قاعدة عامة لتفاضل حاصل ضرب أي عدد محدود من الدوال ...

فإذا كان لدينا حاصل ضرب ثلاث دوال $y = u . v . w$

فإنه يمكن تمثيل الطرف الأيمن كحاصل ضرب u في (vw) فنجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}(vw) + u.\frac{d}{dx}(vw)$$

$$= \frac{du}{dx}(vw) + u.(\frac{dv}{dx}w + v\frac{dw}{dx})$$

$$= \frac{du}{dx}(vw) + u.\frac{dv}{dx}w + uv\frac{dw}{dx}$$

وبهذه الطريقة يمكننا الحصول على قاعدة عامة لتفاضل حاصل ضرب أي عدد محدود من الدوال أى إذا كان $y = u_1 \, u_2 \, ...u_n$ فإن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du_1}{dx}u_2\,.....u_{n-1}u_n+\frac{du_2}{dx}u_1\,.....u_{n-1}u_n$$
$$+\,..........+\frac{du_n}{dx}u_1u_2\,.....u_{n-1}$$

ويمكن كتابة قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين على الصورة الآتية:

$$\frac{\frac{d}{dx}uv}{uv}=\frac{\frac{du}{dx}}{u}+\frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

وذلك بقسمة كل من حدود القانون على u.v .... ومنها يمكن أيضاً الحصول على صورة عامة لتفاضل حاصل ضرب أي عدد من الدوال فنجد أن :

$$\frac{\frac{d}{dx}(u_1u_2u_3...u_n)}{u_1u_2u_3...u_n}=\frac{\frac{du_1}{dx}}{u_1}+\frac{\frac{du_2}{dx}}{u_2}+..........+\frac{\frac{du_n}{dx}}{u_n}$$

مثال (٨–٦) : فاضل بالنسبة لـــ x الدالة:

$$y=(x^2+2x)\,(3x+1)$$

<u>الحـــــــــل</u>

من الواضح أنه يمكن إيجاد التفاضل بفك الأقواس أولاً ثم نفاضل الناتج ، لكن بفرض أن الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالتين كالآتي:

$$u=(x^2+2x)\,,\quad v=(3x+1)$$

وبتطبيق قاعدة حاصل ضرب دالتين ينتج أن:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2+2x)(3)+(3x+1)(2x+2)$$
$$=3x^2+6x+6x^2+8x+2$$
$$=9x^2+14x+2$$

سادساً: مشتقة خارج قسمة دالتين

مشتقة خارج قسمة دالتين عبارة عن حاصل ضرب (دالـــة المقـــام فـــي مشتقة دالة البسط مطروحا منه حاصل ضرب دالة البسط في مشتقة دالة المقام) مقسوما على مربع دالة المقام.

$$if \quad y = \frac{u}{v} \quad then \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, v \neq 0$$

نتيجـــــــة:

إذا كانت c مقدار ثابت ، v دالة يمكن تفاضلها فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx} \quad , \quad v \neq 0$$

٨-٣ دالـــة الدالـــــة

نفرض أن:

$$y = \sqrt{3x^4}$$

فإذا وضعنا

$$u = 3\,x^4$$

فمن الواضح أن "u "دالة في" x "وممكن أن تمثل كما يلي :

$$u = f(x)$$

وعلى هذا فالدالة المفروضة:

$$y = \sqrt{3x^4} = \sqrt{u}$$

تصبح دالة " u " التي هي بدورها دالة " x " فإذا كتبنا $y = f\,(u)$ ، $u = f(x)$ فإن:

$$y = f\,[f(x)]$$

وتسمى دالة الدالة.

ومثال لدالة الدالة أيضاً نجد:

$$y = \sin x^3$$

وهي دالة الدالة نظراً لأنه يمكن أن تكون:

$$y = \sin u = \sin (x)^3$$

وعلى هذا فهي دالة الدالة.

<u>مشتقة دالة الدالة:</u>

إذا كانت:

$$y = f(u) \quad ، \quad u = g(x)$$

دالتين يمكن تفاضلهما، فإن مشقة دالة الدالة $y = f[g(x)]$ تعطى بالعلاقة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ويمكن تعميم هذه النظرية للدوال الأكثر تعقيداً فمثلاً إذا كان:

$$y = f(u) , u = \phi(t) , t = \psi(x)$$

فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

وتسمى قاعدة تفاضل دالة الدالة بقاعدة السلسلة ، نظراً لأن إيجاد المشتقة الأولى بالنسبة إلى x للدالة $y = f [\phi \{\psi(x) \}]$ تشمل سلسلة الخطوات التالية:

- تفاضل الدالة الخارجية $y = f(u)$ بالنسبة إلى u
- تفاضل الدالة $u = \phi(t)$ بالنسبة إلى t
- تفاضل الدالة $t = \psi(x)$ بالنسبة إلى" x "وحاصل ضرب هذه

المشتقات يعطى $\frac{dy}{dx}$ المطلوبة.

مثال(٨–٧) : أوجد مشتقة الدالة:

$$y = (1 + x^2)^3$$

<u>الحـــــــــل</u>

نضع $u = \phi(x) = 1 + x^2$ فتصبح $y = f(u) = u^3$

وتكون المشتقة المطلوبة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$= 3\,u^3\,.\ \ 2x = \ 3(1+x^2)^2\ .\ 2x$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة مباشرة بدون فرض الدالة الداخلية "u" كالآتي:

تفاضل الدالة الخارجية y بالنسبة للقوس فنحصل على $3(1+x^2)^2$
ثم نضرب الناتج في تفاضل القوس نفسه (الدالة الداخلية) بالنسبة إلى "x" أي (2x) .

مثـــال (٨-٨) : أوجد مشتقة الدالة:

$$y=\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)^7$$

الحـــل

$$\frac{dy}{dx}=7\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)^6\cdot\frac{3(2x+1)-2(3x-2)}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{49(3x-2)^6}{(2x+1)^8}$$

٨-٤ المشتقة الأولى للدالة الضمنية:

سبق أن عرفنا أن الدالة الضمنية هي الدالة التي تظهر في الصورة:

$$f(x\,,\,y)=0$$

وللحصول على المشتقة الأولى لهذه الدالة نتبع الخطوات التالية :

١- تفاضل كل حد من حدود العلاقة الضمنية هذه بالنسبة للمتغير x فنحصل على متساوية على الصورة:

$$f(x\,,\,y\,,\,dx/dy)=0$$

٢- نضع المقادير التي تحتوى على (dy/dx) كعامل مشترك في الطرف الأيسر من المتساوية والمقادير الخالية من (dy/dx) في الطرف الآخر من المعادلة .

٣- يقسم كل من الطرفين على معامل (dy/dx) وبذلك نحصل على المشتقة المطلوبة .

مثال (٨-٩) : أوجد المشتقة الأولى (dy/dx) بدلالة x ,y للدالة الضمنية الآتية:

$$x^2 + 3xy + 5y^2 + 6x - 3y + 12 = 0$$

الحـــــــل

مشتقة x^2 هي 2x أما الحد 3xy فيجب تناوله على أنه حاصل ضرب دالتين فتكـــون مشتقته هي: 3x (dy/dx) + 3y في حين أن مشتقة $5y^2$ هي: 10y (dy/dx) ، مشتقة 6x هي 6 ومشتقة 3y- هي 3 (dy/dx)- ومشتقة 12 هي الصفر إذن:

$$2x + 3x(dy/dx) + 3y + 10y(dy/dx) + 6 - 3(dy/dx) = 0$$

$$(dy/dx) \times (3x + 10y - 3) = -2x - 3y - 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 3y - 6}{3x + 10y - 3} = -\frac{2x + 3y + 6}{3x + 10y - 3}$$

مثال(٨-١٠) : أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية:

$$y^5 + 3x^2 y^3 - 7x^6 - 8 = 0$$

الحـــــــل

$$5y^4 \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx} + 3y^2 . 3x^2 + 3y^3 . 2x - 42x^5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{42x^5 - 6xy^3}{5y^4 + 9x^2 . y^2}$$

٨-٥ الدوال المثلثية

من المعروف أن هناك ست نسب مثلثية لأي زاوية ولتكن θ هي:

$$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$$

وإذا عبرنا عن الزاوية بقيمة متغيرة x فإنه يمكن تعريف النسب المثلثية كما يلي:

$$\sin x\ , \cos x\ , \tan x\ , \cot x\ , \sec x\ , \operatorname{cosec} x$$

والدوال المثلثية هي في الواقع دوال دورية أي أن منحنى هذه الدوال يكرر نفسه كل فترة أي أن:

$$f(x+na) = f(x)$$

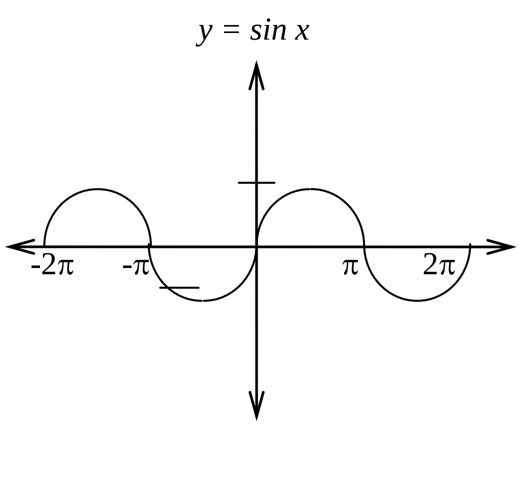
حيث a ثابت ، n عدد صحيح .فنجد أن الدالتين sin x, cos x ومقلوبها cosec x , sec x كلها دوال دورية دورة كل منها (2π) وذلك لأن :

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

ولرسم منحنى الدالة الدورية التى دورتها a نلاحظ أنه يكفي رسم جزء منه في فترة طولها a فقط لأن المنحنى يكرر نفسه بعد وقبل ذلك.
فمثلاً لرسم الدالة $y = \sin x$ انظر إلى الشكل التالى:

نلاحظ أن المنحنى يخرج من نقطة الأصل لأن: sin 0 = 0 وتأخذ الدالة في التزايد مع الزاوية حتى تصل إلى القيمة (١) عند x=π/2 ثم تعود إلى التناقص حتى تصل إلى الصفر عند x= π وتتوالى في التناقص حتى تصل إلى (-١) عند x= 3π/2 ثم تعاود التزايد إلى أن تصل إلى الصفر عند x= 2π

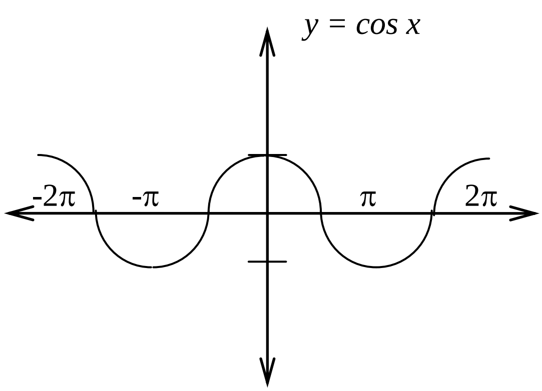


وحيث أن sin x دالة دورية كما ذكرنا في دورتها 2π فإنها تتكرر بعد ذلك كل فترة طولها 2π كذلك نجد أن هذه العلاقة فردية نظراً لأن:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

ومنحناها متماثل بالنسبة لنقطة الأصل في الشكل . كذلك نلاحظ أن الدالـــة sin x مستمرة عند أي قيمة للمتغير x كما هو واضح من اتصال منحناها .

كذلك يوضح الشكل التالي منحنى الدالة $y=\cos x$



نلاحظ أنها تبدأ بالقيمة (١) عندما x=0 وتتناقص حتى تصـــل إلـــى القيمة (−١) عند $x = \pi$ ثم تتزايد حتى تصل إلى الصفر عند $x = 3\pi/2$ وتستمر فـــي التزايـــد حتى تصل ثانية إلى أكبر قيمة لها وهي (+١) عند $x = 2\pi$

ونلاحظ أن هذه الدالة زوجية لأن $\cos(-x) = \cos x$ ومنحناها متماثل بالنســـبة لمحور الصادات وكذلك فهي دالة متصلة لجميع قيم x.

وبمقارنة الشكل السابقين نجد أن منحنى الدالة cos x ينشأ من منحنى الدالة sin x بإزاحة محور الصادات إلى اليمين مسافة $\pi/2$ وهو واضح من العلاقة:

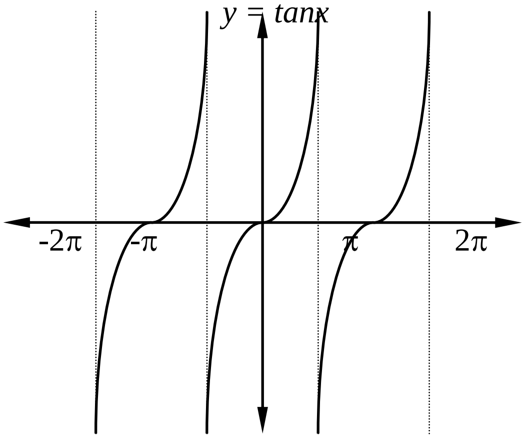
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

كذلك فإن الدالتان $y = \cot x$, $y = \tan x$ دالتان دوريتان دورة كل منهما π لأن:

$$\tan(\pi + x) = \tan x ,$$
$$\cot(\pi + x) = \cot x$$

وذلك لجميع قيم x.

ويوضح الشكل التالي الدالة $y = tan\, x$ حيث نلاحظ الخواص التالية لهذه الدالة:



١- الدالة مستمرة عند جميع قـــيم x المحدودة فيما عدا النقط:

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad ,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2$$

أي أن منحنى الدالة غيـــر متصـــل عند النقط:

$$x = \frac{n\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, ...$$

وهذا واضح من العلاقة :

$$tan\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$$

حيث ينعدم المقام $cos\, x$ عند هذه القيم وتصبح الدالة غير معرفة عند هذه النقط.

٢- الدالة $tan\, x$ فردية أي أن: $tan\,(-x) = -tan\, x$.

٣- الدالة $tan\, x$ غير مقيدة ويمكن أن تأخذ القيم من $-\infty$ إلى $+\infty$ أى أن مدى الدالة غير محدود.

٤- الدالة دورية دورتها π.

ويمكن إستنتاج منحنى الدالة $y = cot\, x$ من منحنى الدالة $tan\, x$ باعتبار أن:

$$cot\, x = \frac{1}{tan\, x}$$

أو من الدالتين: $sin\, x$, $cos\, x$ باعتبار أن:

$$cot\, x = \frac{cos\, x}{sin\, x}$$

ومنحنى الدالة $y = cot\, x$ يكون متصلاً في جميع النقط إلا عند قيم x التي ينعدم عندها المقام $sin\, x$ أي عند النقط:

$$x = n\pi\ ,\ n = 0, \pm 1\ , \pm 2$$

وهذه الدالة فردية ومنحناها متماثل بالنسبة لنقطة الأصل:

$$\cot(-x) = -\cot x$$

كما أن الدالة دورية دورتها π وهي غير مقيدة فتأخذ جميع القيم بين ∞- و ∞+.
كذلك يمكن استنتاج منحنى الدالة $\sec x$ باعتبارها مقلوب الدالة $\cos x$
وعلى هذا فإن: $\sec x$ تكون مستمرة في جميع قيم x فيما عدا النقط التي ينعدم عندها $\cos x$ أي عند:

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2$$

وهي دالة زوجية ومنحناها متماثل بالنسبة لمحور الصادات :

$$\sec(-x) = \sec \pi$$

كما أنها دورية دورتها 2π :

$$\sec(x + 2\pi) = \frac{1}{\cos x + 2\pi} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

وحيث أن مدى الدالة $\cos x$ هو (1 , 1-) فإن مدى الدالة $\sec x$ هو جميع الأعداد التي لا تقع في الفترة المفتوحة (1 , 1-) أي أن منحنى الدالة يقع خارج الشريط الأفقي المحدد بالمستقيمين: $y = \pm 1$.

بالنسبة للدالة $y = \operatorname{cosec} x$ فإنه يمكن استنتاج منحناها بقلب منحنى الدالة $\sin x$ على اعتبار أن:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

وعلى هذا فإن الدالة مستمرة عند جميع قيم x فيما عدا عند القيم التي ينعدم عندها المقام أي عند:

$$x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2$$

وهذه الدالة غير مقيدة وتأخذ جميع القيم التي لا تقع في الفترة (1 , 1-) وهي دالة فردية ومنحناها متماثل بالنسبة لنقطة الأصل. كما أنها دورية ودورتها 2π.

<u>المشتقة الأولى للدوال المثلثية:</u>

<u>أولاً</u> : مشتقة الدالة:

$$\boxed{y = \sin x}$$

حيث أن الخمسة دوال المثلثية الأخرى معرفة بدلالة sin x إذن يكفي إيجاد مشتقة sin x بالمبادئ الأولية للتفاضل ومنها يمكن استنتاج باقي المشتقات للدوال المثلثية الأخرى. وعلى ذلك فإن خطوات إيجاد المشتقة الأولى للدالة y = sin x من المبادئ الأولية تكون كما يلى:

$$y = \sin x \qquad \therefore\ y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \cos x\ .1 = \cos x \qquad \therefore\ \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

وإذا كانت "U " أية دالة في x ويكمن تفاضلها أي $u = \Phi(x)$

وكانت $y = \sin u$ فمن قانون دالة الدالة نحصل على:

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u . \frac{du}{dx}$$

مثال (٨–١١) : إوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

$$a)\ \ y = \sin(3-2x) \quad , \quad b)\ \ y = \sin(5x^2+1)$$

<u>الحـــــــل</u>

$$a)\quad \frac{dy}{dx} = \cos(3-2x).\frac{d}{dx}(3-2x) = -2\cos(3-2x)$$

$$b)\quad \frac{dy}{dx} = \cos(5x^2+1).\frac{d}{dx}(5x^2+1) = 10x\ \ \cos(5x^2+1)$$

<u>ثانياً :</u> مشتقة الدالة:

$$\boxed{y = \cos x}$$

نلاحظ أن:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

ومنها ينتج أن:

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).-1 = -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

وإذا كانت $y = \cos u$ حيث $u = \Phi(x)$ فإن:

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u.\frac{du}{dx}$$

ثالثاً : المشتقة الأولى للدالة:

$$\boxed{y = \tan x}$$

حيث أن:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

وبتطبيق قانون مشتقة خارج قسمة دالتين نجد أن:

$$\frac{d}{dx} = (\tan x) = \frac{(\cos x)\cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

وإذا كانت $y = \tan u$ **حيث** $u = \Phi(x)$ **فإن:**

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

رابعاً : المشتقة الأولى للدالة:

$$\boxed{y = \cot x}$$

يمكن إيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة إما على أساس:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

أو على أساس أن:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

فإذا إعتبرنا العلاقة الأخيرة. أى أن:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(-\sin x).\sin x - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 x$$

and

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\cos ec^2 u \,.\, \frac{du}{dx}$$

<u>خامساً :</u> المشتقة الأولى للدالة:

$$\boxed{y = \sec x}$$

لإيجاد مشتقة sec x نضع

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(-\sin x)}{(\cos^2 x)} = \sec x \,.\, \tan x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \,.\, \tan x$$

and

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \,.\, \tan u \,.\, \frac{du}{dx}$$

سادساً : المشتقة الأولى للدالة:

$$\boxed{y = cosec\ x}$$

بإعتبار أن:

$$cosec\ x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(cosec\ x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -cosec\ x \cdot \cot x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(cosec\ x) = -cosec\ x \cdot \cot x$$

and

$$\frac{d}{dx}(cosec\ u) = -cosec\ u \cdot \cot u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال (٨-١٢): إوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$a)\ \ y = \tan\sqrt{1+x^2}$ $\qquad$ $b)\ \ y = cosec(\sin x)$

$c)\ \ y = x^3 \sec^2 3x$ $\qquad$ $d)\ \ y = \dfrac{1-\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$

<u>**الحـــــــل**</u>

بتطبيق قوانين المشتقات السابقة تجد أن:

$$a)\frac{dy}{dx} = sec^2\sqrt{1+x^2}\ \ .\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ \ .\ sec^2\sqrt{1+x^2}$$

$$b)y = cos\,ec(sin\,x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} = -cos\,ec\,(sin\,x).cot\,(sin\,x).\frac{d}{dx}(sin\,x)$$

$$= -cos\,x\,.cos\,ec\,(sin\,x).cot\,(sin\,x)$$

$$c)\ \ y = x^3\,sec^2\,3x = x^3(sec\,3x)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^3.2\,(sec\,3x).\frac{d}{dx}(sec\,3x) + (sec\,3x)^2\ .3x^2$$

$$= 2x^3.sec\,3x\,.(3\,sec\,3x\,.tan3x) + 3x^2.sec^2\,3x$$

$$= 3x^2\ .sec^2\,3x(2x\,.tan3x+1)$$

$$d)\ \ y = \frac{1-cot^2\,x}{1+cot^2\,x}$$

لايجاد مشتقة هذه الداله نلاحظ أنه يمكن تبسيطها كالأتى :

$$y\ = \frac{1 - cot^2\ x}{1+cot^2\ x} = \frac{1 - cot^2\ x}{cosec^2\ x}$$

$$= sin^2\ x - cos^2\ x\ = -\,cos\,2\,x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\,sin\,2\,x$$

٨-٦ المشتقة الأولى للداله اللوغاريتمية:

سبق أن أثبتنا في الباب الرابع أن:

$$\lim_{m \to 0} (1+m)^{\frac{1}{m}} = e$$

وأمكننا حساب قيمة (e) مقربه لأي عدد يشاء من الأرقـــام العشــرية. ويسمى اللوغاريتم طبيعيا إذا كان للأساس (e) ويرمز للوغاريتم الطبيعي بالرمز $Log\ x$ دون ذكر للأساس أو بالرمز $Ln\ x$ وللتحويل من اللوغاريتم الطبيعي إلى لوغاريتم لأي أساس a مثلا نستخدم العلاقة:

$$Log_a\ x = Log_a\ e \,.\, Ln\ x$$

وللأساس 10 أهميه خاصة كما نعلم من الحسابات باستخدام اللوغاريتم

$$Log_{10}\ x = Log_{10}\ e \,.\, Ln\ x = 0.4343\ Ln\ x$$

$$Ln\ x = Ln\ 10 \,.\, Log_{10}\ x = 2.303\ Log_{10}\ x \,.$$

وإذا كانت $y = \log_a x$ هي داله لوغاريتمية لأي أساس a بحيــث أن $0 < x < \infty$ فإنه لإيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة نجد أن:

$$y = Log_a\ x$$

$$\therefore y + \Delta y = Log_a (x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = Log_a (x + \Delta x) - Log_a\ x \,,\, x = Log_a \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} Log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} Log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} Log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

نضع:

$$\frac{\Delta x}{x} = m$$

فتكون:

$$\frac{1}{m} = \frac{x}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} Log_a (1+m)^{\frac{1}{m}}$$

وبأخذ النهايات عندما $\Delta x \to 0$ وملاحظة أنه عندما $\Delta x \to 0$ فــإن $m \to 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{m \to 0} \frac{1}{x} Log_a (1+m)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{x} Log_a e$$

وبذلك نكون أثبتنا أن المشتقة الأولى للداله اللوغاريتمية لأي أساس (a) هى:

$$\frac{d}{dx}(Log_a x) = \frac{1}{x} Log_a e \quad .$$

أما إذا كانت الدالة لوغاريتمية طبيعية للأساس (e) تكون المشتقة هي :

$$\frac{d}{dx}(Ln\ x) = \frac{1}{x}$$

وعليه إذا كان $y = Ln\ u$ حيث $u = \phi(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(Ln\, u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

وبالنسبه للداله اللوغاريتمية لأي أساس (a) تكون:

$$\frac{d}{dx}(Log_a u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} Log_a e$$

ويمكن كتابتها أيضا على الصورة:

$$\frac{d}{dx}(Log_a u) = \frac{1}{u \,.\, Ln\, a} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال (٨–١٣) : إوجد مشتقة الدالة :

$$y = Log_a (x^2 + 2)$$

الحـــــــل

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x^2+2}\,\frac{d}{d\,x}\left(x^2+2\right) Log_a\, e = \frac{2\,x\;Log_a\, e}{x^2+2}$$

$$or\ \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\left(x^2+2\right)\cdot Ln\,a}\;\frac{d}{d\,x}\left(x^2+2\right) = \frac{2\,x}{\left(x^2+2\right)Ln\,a}$$

مثال (٨–١٤): فاضل بالنسبه إلى x الدالة :

$$y = Ln\, x^3 \left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}$$

الحـــــــل

يمكن كتابة المعادلة على الصورة الأبسط بأخذ اللوغاريتم أولا :

$$y = 3\,Ln\,x + \frac{5}{2}\,Ln\left(x^2+1\right)$$

$$\therefore \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{3}{x} + \frac{5}{2\left(x^2+1\right)}\,2\,x = \frac{3}{x} + \frac{5\,x}{x^2+1} = \frac{8\,x^2+3}{x\left(x^2+1\right)}$$

مثال (٨–١٥): إوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = Ln\ \sin x$$

الحـــــــل

$$\frac{dy}{d\,x} = \frac{1}{\sin x}\cos x \quad = \cot x$$

٨-٧ المشتقة الأولى للدوال العكسية:

إذا كان للدالة $y = f(x)$ داله عكسيه $x = \phi(y)$ (بالطريقة السابق شرحها) وكان لهذه الدالة العكسية عند النقطة y مشتقة $\Phi'(y)$ لا تساوى الصفر فإنه عند النقطة المناظرة x يكون للداله: $y = f(x)$ مشـــتقة $f'(x)$ تساوى $\dfrac{1}{\Phi'(y)}$ أي أن:

$$f'(x) = \frac{1}{\Phi'(y)} \; or \; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

ولإثبات ذلك نفاضل طرفي العلاقة العكسية $x = \phi(y)$ بالنسبة إلى x أخـــذين في الاعتبار أن y داله في x نجد أن :

$$1 = \Phi'(y) . \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\Phi'(y)} . \frac{\dfrac{1}{dx}}{dy}$$

وهو المطلوب .

المشتقة الأولى للدوال المثلثية العكسية:

أولا : الدالة:

$$\boxed{y = sin^{-1} x}$$

ويقصد بهذه الداله أن y عباره عن الزاوية التي جيبها x أى أن:

$$x = sin\ y$$

وتسمى الصورة الأخيرة بالداله المباشرة والصورة الأولى بالداله العكسية ولقد عرفنا أن الدوال المثلثية من الدوال الدائرية وبذلك نجد أن الدالة $x = sin\ y$ متعددة القيم لأن كل قيمه لـــ" x " في الفترة $-1 \leq x \leq 1$ أن يناظرها عدد لا نهائي من القيم "y" . ولكي نجعل " y " وحيدة القيمة نختار لكل "x" قيمه مناظره "y" تقع في المدى $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ فتكون هذه الدالة متزايدة وتعطى

قيمها الفترة $-1 \le x \le 1$ لهذا يكون للداله المثلثية في صورتها العامة:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$y = \sin x$ داله عكسيه نعرفها على أنها $y = \sin^{-1} x$ وهي داله عكسيه للصوره $x = \sin y$ في المدة $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ويكون منحنى الــــدالة:

$x = \sin y$ وذلك بتعديل x مع y ولإيجاد مشتقة هــذه الدالــة تفاضــل طرفي العلاقه $x = \sin y$ بالنسبه إلى y :

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \cos\ y$$

$$\therefore \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\frac{d\,x}{d\,y}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{d\,x}\left(\sin^{-1}\ x\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ ,\quad -\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\ x \le \frac{\pi}{2}$$

وقد أخذت الإشارة الموجبة أمام الجذر لأن الدالة: $y = \sin^{-1}\ x$ تأخــذ قيما في الفتره $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ وبالتالى يكون $\cos y \ge 0$ وإذا كانت "u" داله للمتغير "x" فإنه باستخدام دالة الدالة يمكن إثبات أن:

$$\frac{d}{d\,x}\sin^{-1} u = \frac{\frac{d\,u}{d\,x}}{\sqrt{1 - u^2}}$$

مثال (٨-١٦): إوجد تفاضل الدالة y بالنسبه إلى x إذا كان:

$$y = \sin^{-1}\ (\tan x\ )$$

<u>الحــــــــــــل</u>

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\sec^2\ x}{\sqrt{1 - \tan^2\ x}}$$

<u>ثانيا :</u> الداله:

$$\boxed{y = \cos^{-1} x}$$

من تعريف هذه الدالة العكسية على أنها الدالة العكسية للدالة $x = \cos\ y$ حيث $0 \le y \le \pi$ حيث نكون قد قيدنا تعريف هذه الدالة المثلثية $(0, \pi)$ بـــدلا من $(-\infty, \infty)$ حتى يكون لها قيمه واحده لكل قيمه من قيم المتغير المســـتقل وبذلك تكون داله متناقصة للمتغير "y". ويستنتج منحنى الدالة $x = \cos\ y$ مـــن منحنى الدالة المثلثية العامة $y = \cos\ x$ بتبديل المتغيرين " y , x " ولإيجاد مشتقة دالة جيب التمام العكسية تفاضل طرفي العلا قه $x = \cos\ y$ بالنســـبه إلى " y " كما سبق في الحالة السابقة.

$$\frac{d\ x}{d\ y} = -\sin\ y$$

$$\therefore \frac{d\ y}{d\ x} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\ y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{d\ x}\left(\cos^{-1}\ x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\ y}} \qquad 0 \le \cos^{-1} ç \le \pi$$

$$, \frac{d}{d\ x}\cos^{-1}\ u = -\frac{\frac{d\ u}{d\ x}}{\sqrt{1-u^2}}$$

(حيث u داله للمتغير x).

<u>ثالثا :</u> الدالة :

$$\boxed{y = \tan^{-1}\ x}$$

تعرف هذه الدالة بأنها الدالة العكسية للداله $x = \tan\ y$ وهذه الدالة معرفـــه لجميع قيم x في الفتره $-\infty < x < \infty$ وتعطى قيمتها الفترة:

$$-\frac{\pi}{2} \langle\ y \ \langle\ \frac{\pi}{2}$$

أى أن مداها هو:

$$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

ولإيجاد مشتقة هذه الدالة نتبع نفس الخطوات السابقة:

$$x = \tan y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1+\tan^2 y = 1+x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} u\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

(حيث u داله للمتغير x) .

رابعاً : الدوال:

$$\cot^{-1} x \;,\; \operatorname{cosec}^{-1} x \;,\; \sec^{-1} x$$

بنفس الطريقة السابقة يمكن حساب مشتقات الدوال المثلثية العكسية الباقية وهي كالآتي:

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\frac{1}{1+x^2} \quad , \; 0 \langle \cot^{-1} x \langle \pi$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \text{if } x \geq 1 \text{ then } 0 \leq \sec^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{if } \quad x \leq -1 \quad \text{then } -\pi \leq \sec^{-1} x \langle -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \text{if } \; x \geq 1 \text{ then } 0 \langle \operatorname{cosec}^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{if } \quad x \leq -1 \quad \text{then } -\pi \; \langle y \leq -\frac{\pi}{2}$$

باستخدام دالة الدالة أي إذا كانت "u " داله للمتغير " x " فإن :

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} u\right) = \frac{-\,{du}/{dx}}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} u\right) = \frac{{du}/{dx}}{u\sqrt{u^2-1}} \;,\; u^2 \rangle 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1} u\right) = -\frac{{du}/{dx}}{u\sqrt{u^2-1}} \;,\; u^2 \rangle 1$$

مثال (٨–١٧): إوجد $\frac{dy}{dx}$ للداله:

$$y = \tan^{-1}(\tan x)$$

<u>الحـــــــــــل</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x} = 1$$

وعندما $d\,y\,/d\,x$ يساوى واحد معنى هذا أنه تفاضل المقــدار "x" .. وهذا يمكن ملاحظته إذا حاولنا نفهم معنى المقدار $\tan^{-1}\ (\tan x\ )$ فهو يعنـــى الزاوية التي ظلها ظا x فتكون هي الزاوية "x" وتفاضل "x" بالنســبه لـــــ "x" يساوى الواحد الصحيح ... وعلى ذلك تكون قاعدة هامة بالنسبه لجميـــع النسب المثلثية كالآتي :

$$y\ =\ \sin^{-1}\ (\sin x\ )\ =\ x$$
$$y\ =\ \cos^{-1}\ (\cos x\ )\ =\ x$$
$$y\ =\ \tan^{-1}\ (\tan x\ )\ =\ x$$

وكذا بالنسبه لباقى النسب المثلثيه .

مثال (٨-١٨): إوجد $d\,y\,/\,d\,x$ للداله:

$$y\ =\ \cot^{-1} x^3$$

<u>الحـــــــــــــــل</u>

$$\frac{d\ y}{d\ x}=\frac{-1}{1+\left(x^3\right)^2}\,\frac{d}{d\ x}\left(x^3\right)=\frac{-3\ x^2}{1+x^6}\ .$$

٨-٨ المشتقة الأولى للداله الأسية:

من المعروف من دراستنا السابقة أن الدالة العكسية للداله اللوغاريتميـــة $x = \log_a y$ تكون الدالة الأسيه $y\ =\ a^x$ (حيث $-\infty < x < \infty$, $a > 0$) ولإيجاد المشتقة الأولى للداله الأســيه $y\ =\ a^x$ تفاضــل الـــــــــداله اللوغاريتمية $x\ =\ \log_a y$ بالنسبه إلى "x":

$$1\ =\frac{1}{y\,.\,Ln\,a}\cdot\frac{d\ y}{d\ x}$$

$$\therefore\frac{d\ y}{d\ x}=y\,.\,Ln\,a=a^x\ .\,Ln\,a$$

$$\therefore\frac{d}{d\ x}\left(a^x\right)=a^x\ Ln\,a$$

وعامة إذا كان $y\ =\ a^u$ حيث "x" داله في "x" فإن :

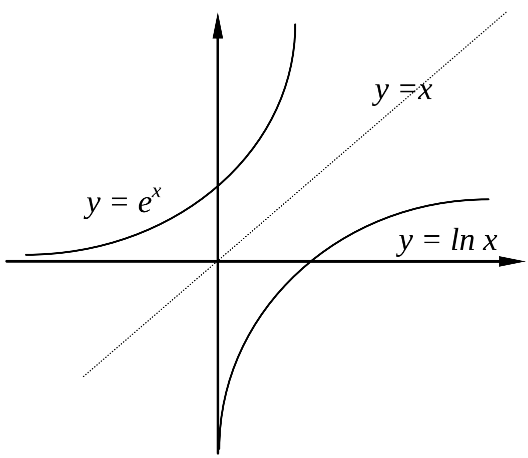
$$\therefore \frac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u \cdot \frac{du}{dx} \quad Ln\,a$$

أما في حالة $a = e$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

(حيث $Ln\,a = 1$)

ويوضح الشكل التالي منحنى الدالتين: $y = \ln x$, $y = e^x$ حيث تنشأ إحداهما كصورة انعكاس للدالة الأخرى على المستقيم $y = x$ ومن الملاحظ أن مشتقة الدالة $y = e^x$ هي نفسها أي أنها لم تتأثر بعملية التفاضل وهذا يعنى بيانيا أن ميل المماس عند أي نقطة على منحنى الدالة $y = e^x$ يساوى الإحداثي الصادي لهذه النقطة.



مثال (٨-١٩):

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدالتين الآتيتين:

$$1)\ y = e^{x^2} \qquad\qquad 2)\ y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

<u>الحـــــــــــل</u>

مما سبق نجد أن بالتفاضل بالنسبة إلى x فإن :

$$1)\ \frac{dy}{dx} = e^{x^2} \times \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x \times e^{x^2}$$

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{2\left(e^{2x}+1\right)e^{2x} - 2\left(e^{2x}-1\right)e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{4 \times e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

٨-٩ التفاضل اللوغاريتمي:

أحيانا يطلب منا إيجاد مشتقة بعض الدوال المعقدة مثل الدوال التي يدخل في تكوينها عمليات ضرب وقسمة دوال "x" وأحيانا رفع دوال "x" إلى قوى هي في حد ذاتها دوال "x" في هذه الحالة نلجأ إلى تبسيط الدالة المعطاة بأخذ اللوغاريتم للأساس "e" لكل من الطرفين ثم نجرى عملية التفاضل بعد ذلك فمثلا:

حيث u , v دالتين لـ x $y = u^v$

$$\therefore \ln y = \ln u^v = v \ln u$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على:

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \times \ln u + v \times \frac{d}{dx} \ln u$$

$$= \frac{dv}{dx} \ln u + \frac{v}{u} \times \frac{du}{dx}$$

وبالضرب في $y = u^v$ ينتج أن :

$$\frac{d}{dx}\left(u^v\right) = u^v$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} \ln u + v\, u^{v-1} \frac{du}{dx}$$

مثـــال (٨-٢٠):

أوجد مشتقة الدالة :

$$y = x^x$$

الحــــل

$$\ln y = x \times \ln x$$

$$\therefore \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(x^x\right) = x^x \left(\ln x + 1\right)$$

٨-١٠ مشتقة دالة بارامترية:

نفرض أن y دالة x ممثلة بارامتريا بالمعادلتين

$$x = f(t) \quad , \quad y = \phi(t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\phi^{é}(t)}{f^{é}(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad , \quad f^{é}(t) \mp 0$$

وتثبت صحة هذا القانون من العلاقة

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

وبأخذ النهايات عندما تؤول Δx وبالتالي Δt إلى الصفر أيضا

مثـــــال (٨-٢١):

أوجـد قيمــة (dy/dx) للدالـــة y = f (x) الممثلـــة بالمعـــادلتين البارامتريتين

$$x = a \cos t \quad , \quad y = a \sin t$$

الحــــــل

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a \cos t}{- a \sin t} = - \cot t$$

٨-١١ المشتقات العليا للدالة Derivative of Higher Orders

إذا كانت $y = f(x)$ دالة يمكن تفاضلها، وقد عرفنا كيف يمكـن إيجـاد مشتقتها الأولى $dy/dx = f'(x)$ وإذا كانت $f'(x)$ نفسها يمكن تفاضلها فإنـه يمكن حساب مشتقتها $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ وهذه نسـميها المشـتقة الثانيـة للدالـة y

ويمكننا أن نكرر هذه العملية لنحصل على مشتقات من رتب أعلى ويرمـز لهـذه المشتقات برموز كثيرة منها:

إذ ا كانت المشتقة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} \;,\; \frac{d}{dx}y \;,\; y' \;,\; f'(x)$$

فإن المشتقة الثانية تكون :

$$\frac{d^2y}{d\,x^2} \;,\; \frac{d^2}{d\,x^2}y \;,\; y'' \;,\; f''(x)$$

المشتقة النونية :

$$\frac{d^n\,y}{d\,x^n} \;,\; \frac{d^n}{d\,x^n}y \;,\; y^{(n)} \;,\; f^{(n)}(x)$$

ويمكن أن يرمز أيضا للمشتقات الرابعة والخامسة والرتب الأعلى بالأعداد الرومانية كما يلى :

$$y^{iv} \;,\; y^{v} \;,\; y^{vi} \;,\; ....$$

حتى نتفادى كتابة رتبة المشتقة بين قوسين

فمثلا إذا كانت الدالة $y = x^6$ فإن:

$$y' = 6x^5 \;,\; y'' = 30x^4 \;,\; y''' = 120x^3 \;,\; y^{iv} = 360x^2 \;,\; y^{v} = 720x \;,$$

$$y^{vi} = 720 \;,\; y^{vii} = y^{(7)} = y^{(8)} = ...0$$

مثـــــال (٨-٢٢) :

أوجد المشتقات العليا للدالة $y = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب

<u>الحـــــــــــــل</u>

$$y' = \frac{dy}{dx} = n\, x^{(n-1)}$$

$$y'' = \frac{d^2\, y}{d\, x^2} = n\left(n-1\right) x^{\,(n-2)}$$

$$y''' = \frac{d^3\, y}{d\, x^3} = n\left(n-1\right) x^{\,(n-3)}$$

. ...

$$y^{\,(r)} = \frac{d^r\, y}{d\, x^r} = n\left(n-1\right)\left(n-2\right)....\left(n-r+1\right)x^{\,(n-r)}$$

....

$$y^{(n)} = \frac{d^n\, y}{d\, x^n} = n\left(n-1\right)............2\times I = n\,1$$

$$\frac{d^k\, y}{d\, x^k} = 0 \;\; ; \;\; k \rangle n$$

مثـــــال (٨-٢٣) :

أوجد المشتقات النونية للدالة $y = n^{mx}$ حيث m كمية ثابتة

<u>الحـــــــــــل</u>

$$y' = m\, e^{mx}$$

$$y'' = m^2\, e^{mx}$$

$$y''' = m^3\, e^{mx}$$

....

$$y^{(n)} = m^n\, e^{mx}$$

مثـــــال (٨-٢٤) :

أوجد $y^{(n)}$ للدوال **2)** $y = \cos x$ **1)** $y = \sin x$

<u>الحـــــــــــل</u>

1) $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

2) $y = \cos x$

$$y = \sin x = \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

ملخص قوانين التفاضل الأساسية

Function الدالة	Derivative تفاضلها
Constant الثابت	0
x	1
$u \pm v$	$u' \pm v'$
cu	cu'
uv	$uv' + u'v$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
$\frac{c}{v}$	$-\frac{cv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
u^v	$vu^{v-1}u' + u^v \ln u v'$
$y = f(u),\ u = \phi(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}, \quad \frac{du}{dx}$
$y = f(x),\ x = \phi(y)$	$\frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}$
Sin x	Cos x
Sin cx	c cos x
Cos x	- sin x
Tan x	Sec^2 x
Cot x	- cosec^2 x
Sec x	Sec x . tan x
Cosec x	-cosec x . cot x
Sin^{-1} x	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
Cos^{-1} x	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\mathrm{Tan}^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{Cot}^{-1} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{Sec}^{-1} x$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{Cosec}^{-1} x$	$-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e$
$\mathrm{Ln}\, x$	$1/x$
$x = f(t),\ y = \phi(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} / \dfrac{dx}{dt}$