التفاضل **Calculus**

مقسم الى جزئين ندرس فى هذا الترم الجزء الاول منه وهو :-

الدوال **Function** وندرس فيه :- تعريف الدالة - شروطها - مجال ومدى الدالة - اختبار مدى اتصال الدالة - النهايات والاتصال - دالة الدالة - الاشتقاق والمشتقة الاولى ويقسم الجزء الاول الى :-

١- حدود الدالة واتصالها **Functions Limits and Continuity**

٢- الاشتقاق **Derivatives**

٣- المحددات **Integration**

٤- المتتابعات والمتواليات

٥- اختبار التقارب والتباعد (قد يتم دراسته فى هذا الترم او لا)

الهدف من دراسة مقرر التفاضل

- معرفة اساسيات علم التفاضل والتكامل
- معرفة كيفية حساب النهايات العظمى والصغرى والمساحات اسفل المنحنيات وغير ذلك
- المقرر هو المحاضرات النظرية والمحاضرات العملية وهو المتلزمين به فى الامتحان مع اعطاء اهمية قصوى للامثلة فى المحاضرات وكذلك الامثلة التى سيتم اعطاؤها فى محاضرات المراجعة
- الامتحان من ١٠٠ درجة كلها فى الامتحان النهائى ولايوجد اعمال سنة

الدوال

- الدالة هى علاقة بين مجموعتين
- شروط الدالة : وجود عنصر مقابل ووحيد من عناصر المجموعة الثانية لكل عنصر من عناصر المجموعة الاولى.
- ملحوظة :اذا واذا فقط كانت دالة الفئة الثانية لعنصرين من عناصر الفئة الاولى متساوية فان العنصر الاول يساوى العنصر الثانى

iff $y1 = f(x1)$; $y2 = f(x2)$; $y1 = y2$

So $x1=x2$

مجال الدالة والمدى

- مجال الدالة :هو مجموعة عناصر الفئة الاولى ويسمى **Domain** ويرمز له رياضيا **Dom.f**
- المجال المساعد (المصاحب) **Codomain** : ويسمى ايضا مجال الدالة المقابل وهو مجموعة عناصر الفئة الثانية
- مدى الدالة : هو مجموعة العناصر فى المجال المقابل (عناصر الفئة الثانية) والتى يكون لكل منها اصل فى مجموعة المجال (عناصر الفئة الاولى) ويسمى **Range** وهو دائما مجموعة جزئية من المجال المساعد.

مثال

ابحث هل المجموعات التالية دوال ام لا؟ثم اوجد المجال والمجال المساعد والمدى للدوال منها.

1-X={a;b;c) ,Y={m;n;o;p) where f(a)={m;n} & f(b)=o & f(c) =p

2-X={a;b;c;d) ,Y={m;n;o;p) where f(a)=m & f(b)=o & f(c) =p

3-X={a;b;c;d) ,Y={m;n;o;p) where f(a)=m & f(b)=o & f(c) =p & f(d) =n

4-X={a;b;c;d) ,Y={m;n;o;p) where f(a)=m & f(b)=m & f(c) =m & f(d) = p

الحل :-

١ -المجموعتين ليس بينهما علاقة فليست دالة حيث ان عنصر واحد من الفئة المجموعة الاولى له اكثر من عنصر مقابل فى الفئة الثانية (لا يتوفر شرط لكل عنصر فى المجموعة الاولى عنصر وحيد فى المجموعة الثانية).

٢ -المجموعتين ليس بينهما علاقة فليست دالة حيث انه يوجد عنصر من عناصر الفئة الاولى ليس له عنصر مقابل فى الفئة الثانية (لا يتوفر شرط لكل عنصر فى المجموعة الاولى عنصر مقابل فى المجموعة الثانية).

٣-المجموعتين بينهما علاقة فهى دالة حيث ان شروط الدالة متوفرة وهى ان لكل عنصر من عناصر الفئة الاولى له عنصر(١- مقابل٢- وحيد) من عناصر الفئة الثانية.

Domain ={a;b;c;d}

Co-domain = { m;n;o;p}

Range = {m;n;o.p}

٤-المجموعتين بينهما علاقة فهى دالة حيث ان شروط الدالة متوفرة وهى ان لكل عنصر من عناصر الفئة الاولى له عنصر(١- مقابل٢- وحيد) من عناصر الفئة الثانية ، حتى ولو كان هذا العنصر ممثلا من قبل لعنصر اخر من عناصر الفئة الاولى وكذلك حتى ولو كانت بعض عناصر الفئة الثانية ليست ممثلة فى مدى الدالة.

Domain = {a;b;c;d}

Co-domain = { m;n;o;p}

Range = {m;p}

الدالة الثابتة : Constant Function

الشكل العام لها هو -:

Y=f(x) = c = 3

Dom.f= R

Range.f = c

مجال الدالة الثابتة هو مجموعة الاعداد الحقيقية **R** ، ومداها هو (الثابت المعطى فى الدالة) **C** اى مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية.

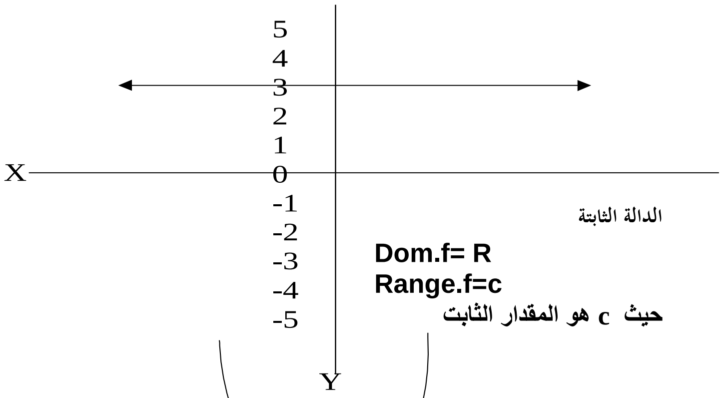
الدالة الخطية : Linear Function

الشكل العام لها هو-:

$Y=f(x) =ax +b \; ; \; a \neq 0$

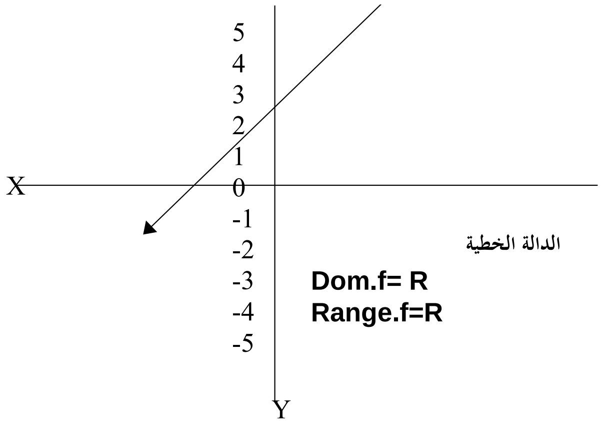
حيث **a** لاتساوى الصفر كما يبدو فى الرسم البيانى للدالة الخطية

مجال الدالة الخطية هو مجموعة الاعداد الحقيقية **R** ومداها هو مجموعة الاعداد الحقيقية



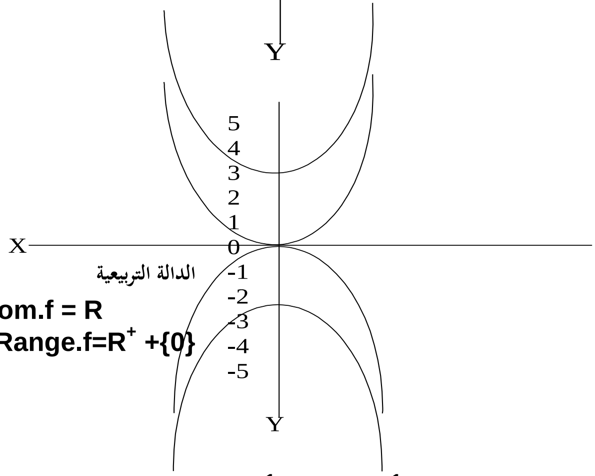
الدالة الثابتة

Dom.f= R
Range.f=c
حيث c هو المقدار الثابت



الدالة الخطية

Dom.f= R
Range.f=R



الدالة التربيعية

Dom.f = R
Range.f=R^+ +{0}

الدالة التربيعية : Quadratic Function

الشكل العام لها هو

$Y=f(x) = ax^2+bx+c : a;b;c \in R \; ; a \neq 0$
$Y=f(x) = x^2$
$Y=f(x) = x^2+1$

لاحظ ان :

- **اذا ساوت a الصفر تحولت الى معادلة خطية**
- **يوضح الرسم البيانى للدالة التربيعية**
- **اذا كانت قيمة Y سالبة فان الرسم البيانى يتجه للاسفل**
- **يتم ازاحة المنحنى بمقدار الحد المطلق سواء بالسالب او بالموجب**

الدالة كثيرات الحدود : Polynanid Function

الشكل العام لها هو

$f(x)^n=a1x^n+a2x^{n-1} + \ldots . +a^{n-1}$

مجال الدالة كثيرات الحدود هو مجموعة الاعداد الحقيقية R
مداها هو حسب التعويض فى المعادلة اى مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقة

الدالة الجذرية

١- دالة الجذر التربيعى

مجال دالة الجذر التربيعى هو مجموعة الاعداد الحقيقية
مداها هو حسب التعويض فى المعادلة اى مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقة

$$F(X) = \sqrt{X}$$
$$Dom.f = R^+ - \{0\}$$
$$Range.f \in R$$

٢- دالة الجذر التكعيبى

مجال دالة الجذر التكعيبى هو مجموعة الاعداد الحقيقية
مداها هو حسب التعويض فى المعادلة اى مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقة

$$F(X) = \sqrt[3]{X}$$
$$Dom.f = R - \{0\}$$
$$Range.f \in R$$

الدالة الكسرية

الشكل العام لها هو

$$F(X) = \frac{1}{X}$$
$$OR; F(X) = \frac{1}{X^2 - 1}$$
$$OR; F(X) = \frac{1}{X^3 - 1}$$

مجال الدالة الكسرية هو مجموعة الاعداد الحقيقية ناقص مجموعة اصفار المقام
مداها هو حسب التعويض فى المعادلة اى مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية

الجمع والطرح والضرب والقسمة فى الدوال

if f & g are two functions then
(f+g)(x)=f(x)+f(g)
if f & g are two functions then
(f-g)(x)=f(x)-f(g)
if f & g are two functions then
(f*g)(x)=f(x)*f(g)
if f & g are two functions then
(f/g)(x)=f(x)/f(g);f(g) ≠ 0

دالة الدالة Composite Function

If f & g are real valued functions then the Composite Function
fog (x) = f(g(x))

لنفهم كيفية عمل الدالة المركبة (الدالة العكسية) يجب ان نفهم اولا كيفية عمل الدالة العادية (البسيطة) فنحن عندما نقول ان x دالة فى y او بالمفهوم الرياضى f(x)=y فاننا نعنى ان الدالة تتحرك من x الى y وفى الدالة المركبة نقصد نفس المعنى ولكن بدلا من ان تتحرك x الى y فان x تتحرك الى g(x) اى ننا نرى تأثير f على g فنرى كيفية تعامل الدالة مع x ويكون هو نفس تعامل الدالة مع g(x)

مثال

$f(x) = x^3 \; ; g(x)=3x^3- 4$
Find fog

١- نرى تاثير دالة f(x) على المتغير x

نجد انها تضرب x فى نفسها ثلاث مرات

٢- نأخذ نفس التاثير ونؤثر به على الدالة g(x) اى نضرب كل الدالة فى نفسها ٣ مرات اى نرفعها الى الاس ٣

٣- نتيجة الحل

$fog(x)=f(g(x))= (3x^3-4)^3$

المحاضرة الثانية

مراجعة المجال والمدى

مجال الدالة: هو قيم x التى يمكن التعويض بها فى الدالة

المدى : هو قيم نواتج الدالة بعد التعويض

المجال المصاحب : هو المجال المتوقع ان تكون النواتج منه

مجال مجموع او طرح او ضرب دالتين :

هو مجال الدالة الاولى تقاطع مجال الدالة الثانية

مجال قسمة دالتين :

هو مجال الدالة الاولى تقاطع مجال الدالة الثانية بشرط ان مجال الدالة المقسوم عليها لايساوى الصفر

$$Dom.(f+g)(x) = \{x : x \in Dom.f(x) \cap x \in Dom.g(x)\}$$
$$Dom.(f-g)(x) = \{x : x \in Dom.f(x) \cap x \in Dom.g(x)\}$$
$$Dom.(f*g)(x) = \{x : x \in Dom.f(x) \cap x \in Dom.g(x)\}$$
$$Dom.(f/g)(x) = \{x : x \in Dom.f(x) \cap x \in Dom.g(x) \cap g(x) \neq 0\}$$

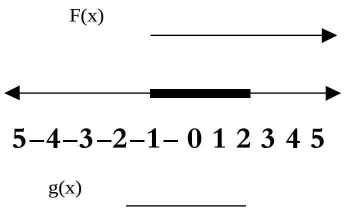
امثلة

$$If - f(x)=\sqrt{x+1}; g(x)=\sqrt{4-x^2}$$
$$Find - Domain$$
$$(f+g)(x);(f-g)(x);(f*g)(x);(f/g)(x)$$

الحل

$$Dom.(f+g)(x)=dom.f(x)\cap dom.g(x)$$
$$dom.f(x)=\{x : x \geq -1\}$$
$$dom.g(x)=\{x : -2 < x < 2\}$$
$$Dom.(f+g)(x)=\{x : -1 \leq x < 2\}$$

- يكون مجال طرح وضرب الدالتين نفس مجال الجمع وبنفس الصيغة
- بالرغم من ان مجال قسمةالدالة الاولى على الثانية سيكون نفس النتيجة الا انه يجب التاكيد على ان المقام لايساوى الصفر
- الجذور لاتجمع ولاتطرح ولكن تضرب وتقسم
- لايمكن ان يكون ماتحت الجذر التربيعى سالبا لانه سيكون جذر تخيلى او وهمى
- مجال مجموع الدالتين عبارة عن مجال الدالة الاولى تقاطع مجال الدالة الثانية
- المفترض ان جذر الصفر قيمة غير محددة مثل مالانهاية وعلى ذلك لم يتم اخذ ٢ فى المجال
- مجال ناتج قسمة الدالتين عبارة عن مجال الدالة الاولى تقاطع مجال الدالة الثانية يخصم من ذلك مايجعل المقام يساوى الصفر
- لاحظ انه يمكن الوصول الى نفس النتائج اذا تم حل المعادلة بيانيا على خط الاعداد وذلك عن طريق تحديد مجال f(x) على خط الاعداد



note

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$$
$$\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{a * b}$$
$$\sqrt{a} / \sqrt{b} = \sqrt{a / b}; \sqrt{b} \neq 0$$

ثم تحديد مجال g(x) ثم تحديد نقاط تقاطعهما على خط الاعداد وتكون هذه النقاط أو هذه الفترة هى نتيجة الحل اى مجال مجموع او طرح او ضرب او الدالتين

امثلة على الدالة العكسية

Find f (x); g(x)

$$if \_ fog(x)=h(x); h(x)=\sqrt{(x-3)(x+2)}$$

الحل

من المعطيات نلاحظ هيمنة الجذر على الدالة h(x) لذلك نجعل الدالة الاولى المهيمنة هى الجذر وتكون الدالة الاولى ويكون الناتج هو الدالة الثانية

$$f(x)=\sqrt{x}$$
$$g(x)=(x-3)(x+2)$$

امثلة على المدى والمجال

اوجد المجال والمدى للدوال الاتية:

1-f(x)=2x-1 الدالة الخطية

Dom.f(x)=R

Range f(x)=R

2-f(x)=x^2 الدالة التربيعية

Dom.f(x)=R

Range f(x)=R+ U {0}

باعتبار ان ٠*٠ قيمة لها معنى
يمكن ان يكون الحل على شكل معادلة

Range f(x)= 0 ≤ x < ∞

Or range f(x) = {x:x∈R+ ∪{0}}

3-f(x)=1/x الدالة الكسرية

Dom.f(x)=R;x<>0

Range f(x)=R-{0}

$$4-f(x)=\sqrt{2x+3}$$

$$Dom.f(x):x>3Range\_f(x):R$$

$$or\_Dom.f(x):R^{+}-(0:3]$$

$$5-f(x)=\sqrt[3]{2x-1}$$

$$Dom.f(x):R$$

$$Range\_f(x):R$$

$$6-f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

<u>حالة خاصة من الدالة الكسرية</u> (او الحالات التى يصعب فيها رسم الدالة او ايجاد المجال والمدى)

الحل يكون بعكس الدالة فبدلا من ان تكون علاقة من x الى y نجعلها علاقة من y الى x كالتالى:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

$$y=\frac{1}{x^2-1}\therefore y(x^2-1)=1$$

$$x^2-1=\frac{1}{y}\therefore x^2=\frac{1}{y}+1$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{y}+1}\therefore\frac{1}{y}+1>0$$

$$\therefore\frac{1}{y}>-1\therefore-\frac{y}{y}>\frac{y}{1}\therefore-1>y$$

$$7-f(x)=\sqrt{2x-6}$$

$$7-solving$$

$$y^2=2x-6\therefore 2x-6>0\because 2x>6\therefore x>3$$

<u>الدالة الزوجية والفردية</u>

الدالة الزوجية Even Function هى الدالة التى تمتص الاشارة فتحتويها وتخفيها ويكون f(x)=f(-x) فهى دالة متماثلة حول محور الصادات

الدالة الفردية Odd Function هى الدالة التى تطرد الاشارة خارج الدالة فهى دالة متماثلة حول محور السينات ويكونf(-x)= -f(x)

♍ قد تكون الدالة لازوجية ولافردية

<u>الامثلة:ابحث هل الدوال الاتية زوجية ام فردية</u>

1- $f(x)=x^2$

الحل : الخطوة الاساسية هى التعويض بالاشارة - الخطوة الثانية نرى تاثير ذلك على الدالة
f(-x)=(-x)2=x2=f(x)اذن الدالة زوجية

2- $f(x)=x^3$

f(-x)=(-x)3=-(x)3=-f(x)اذن الدالة فردية

3- $f(x)=(x^2-1)$

f(-x)=(-x)2-1=x2-1=f(x)اذن الدالة زوجية

4- f(x)=x+1

f(-x)= (-x)+1=-(x-1)اخرجت الاشارة ولكن تغيرت الدالة فليست هى الدالة الاصلية
اذن هذه الدالة لا زوجية ولا فردية

5- $f(x)=(x^2+3)^2$

f(-x)=((-x)2+3)2=(x2+3)2= f(x)اذن الدالة زوجية

$$6 - f(x) = x + \frac{3}{x-1}$$

$$f(-x) = -x + \frac{3}{-x-1}$$

$$f(-x) = \frac{-3}{x+1} - x$$

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$$

$$notEVENnorODD$$

<u>النهايات مقدمة وتعريف</u>

النهاية هى توقع قيم دالة عند نقطة معينة غير موجودة فى مجال الدالة (لكن عندما تقترب جدا منها) بمعنى انه عند وجود قيم لايمكن التعويض بها فى مجال الدالة يمكن توقع قيمة الدالة عند هذه القيم

مثال هل يمكن توقع قيمة الدالة ١ x-2/عند القيمة ٢ (نعم) كيف؟

نعوض بقيم اكبر من ٢ بقليل حتى تقترب جدا من ٢ وكذلك نعوض بقيم اقل من ٢ بقليل حتى تقترب جدا من ٢ انظر المثال المرافق نجد ان هذه الدالة تقترب جدا من ٤ سواء من جهة اليمين او جهة اليسار اى ان نهاية الدالة السابقة ٤ عند القيمة ٢

F(x)=x2-4/x-2			
X	F(x)	x	F(x)
1.9	3.9	2.1	4.1
1.99	3.99	2.01	4.01
1.999	3.999	2.001	4.001
1.9999	3.9999	2.0001	4.0001
1.99999	3.99999	2.00001	4.00001
1.99999	3.99999	2.000001	4.000001

المحاضرة الثالثة

النهايات

وجدت لحل مشكلة الدوال التى ليس لها تعريف (غير متصلة) عند نقاط معينة واول من عمل على النهايات هو اوجستين لوى كوشر فى اوائل القرن التاسع عشر .

مثال :

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

الحل :

$$y = f(1) = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{unkown}$$

$$Dom.f = \{x : x \in R - \{1\}\}$$

السؤال الان : هل لايمكن ان نتنبأ بقيمة الدالة عند قيم العناصر التى تقترب من الواحد ؟

What is the value of f(x) will approach when x approach 1

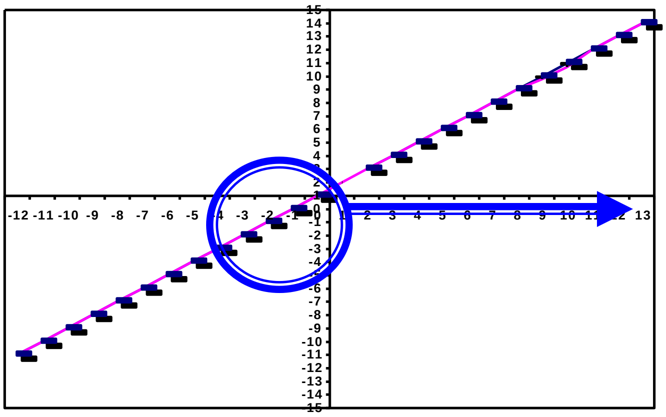
ماالقيمة التى ستصل اليها الدالة عندما تقترب قيمة عنصر منها من الواحد؟

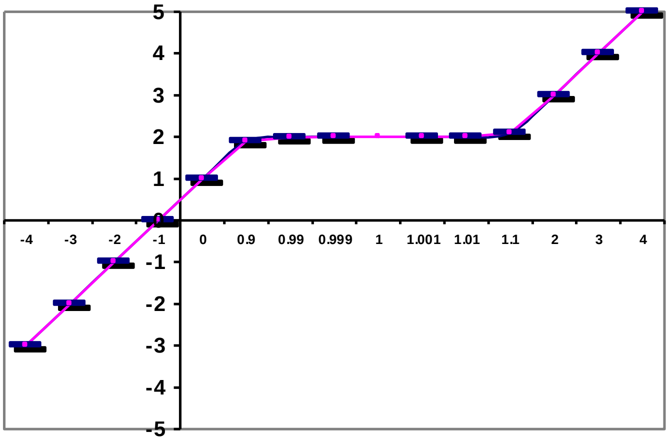
$$\underset{x \to 1}{f(x)} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

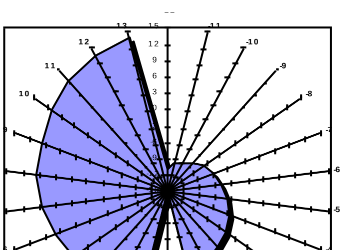
لتقريب صورة النهايات الى الذهن نضع قيم تقترب من الواحد من جهة اليمين (اكبر من الواحد بقيم متناهية فى الصغر) ومن جهة اليسار (اصغر من الواحد بقيم متناهية فى الصغر) ونوجد قيم الدالة عند هذه القيم التى تنتهى (تقترب جدا) الى الواحد

X^+ من جهة اليمين	F(x)	X^- من جهة اليسار	F(x)
1.00001	2.00001	0.99999	1.99999
1.0001	2.0001	0.9999	1.9999
1.001	2.001	0.999	1.999
1.01	2.01	0.99	1.99
1.1	2.1	0.9	1.9

ماذا نلاحظ ؟ نلاحظ ان الدالة تقترب قيمتها من ٢ كلما اقتربنا من ١ من كلا الجهتين اى اذا افترضنا انه يوجد عنصر من عناصر الدالة قيمته ١ يكون مجال الدالة ٢ او بصيغة اخرى تكون قيمة الدالة ٢







$x \in neigh(0; x \neq 0)$

واجمالا تدور الدالة حول هذه القيمة ولكنها ابدا لاتساويها كما فى الشكل والتعريف الرياضى المقابل (يمكن ان يكون للدالة جميع قيم الجوار للنقطة ٠ ولكنها ابدا لاتساوى ٠)

مثال اخر :ابحث اذا كان للدالة نهاية عند النقطة x = ٠ ام لا؟ $f(x)=\frac{1}{x};x\to 0$

الحل:

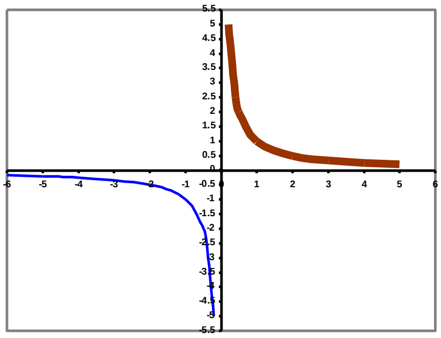
يوجد ثلاثة شروط حتى نقول ان هذه الدالة لها نهاية ام لا وهى: ١- الدالة غير متصلة عند النقطة المراد بحث الدالة فيها

♍ قد يكون لها قيمة محددة عند هذه النقطة (متصلة) فهو شرط يمكن التغاضى عنه

٢- لها قيم قبل هذه النقطة ٣- لها قيمة بعد هذه النقطة

اولا : بيانيا نجد ان قيم الدالة تاخذ الشكل التالى :

ويلاحظ منه ١- الدالة ليس لها قيمة عند الصفر ٢- الدلة لها قيم قبل هذه النقطة و تقترب من – مالانهاية ٣- الدلة لها قيم بعد هذه النقطة و تقترب من مالانهاية ولكن السوال؟؟ هل تقترب قيم الدالة من جهة اليمين الى قيم الدالة من جهة اليسار؟ اذن بيانيا ليس لهذة الدالة نهاية عند القيمة صفر ثانيا عن طريق جدول قيم الدالة (نفس النتيجة)



F(x)	X^- من جهة اليسار	F(x)	X^+ من جهة اليمين
-0.33333	-3	0.333333	3
-0.5	-2	0.5	2
-1	-1	1	1
-2	-0.5	2	0.5
-2.5	-0.4	2.5	0.4
-5	-0.2	5	0.2

ويمكن ايجاد نفس الحل رياضيا :

$$f(x)=\frac{1}{x};x\to 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)\ (\frac{1}{x})\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)\ (\frac{1}{x}) \qquad So\_\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{x}Doesnot\_exist$$

<u>مثال اخر</u>

$$find;\lim_{x\to 0} f(x)=\sqrt{x}$$

$$sloving$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\ exist$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\ doesnot,exist$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)\ doesnot,exist$$

<u>Definition</u>

Let l be a real number and f(x) is defined on an open set (a,b) containing the point x_o we say that f(x) has a limit at x_o and written as:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=l;l<\infty$$

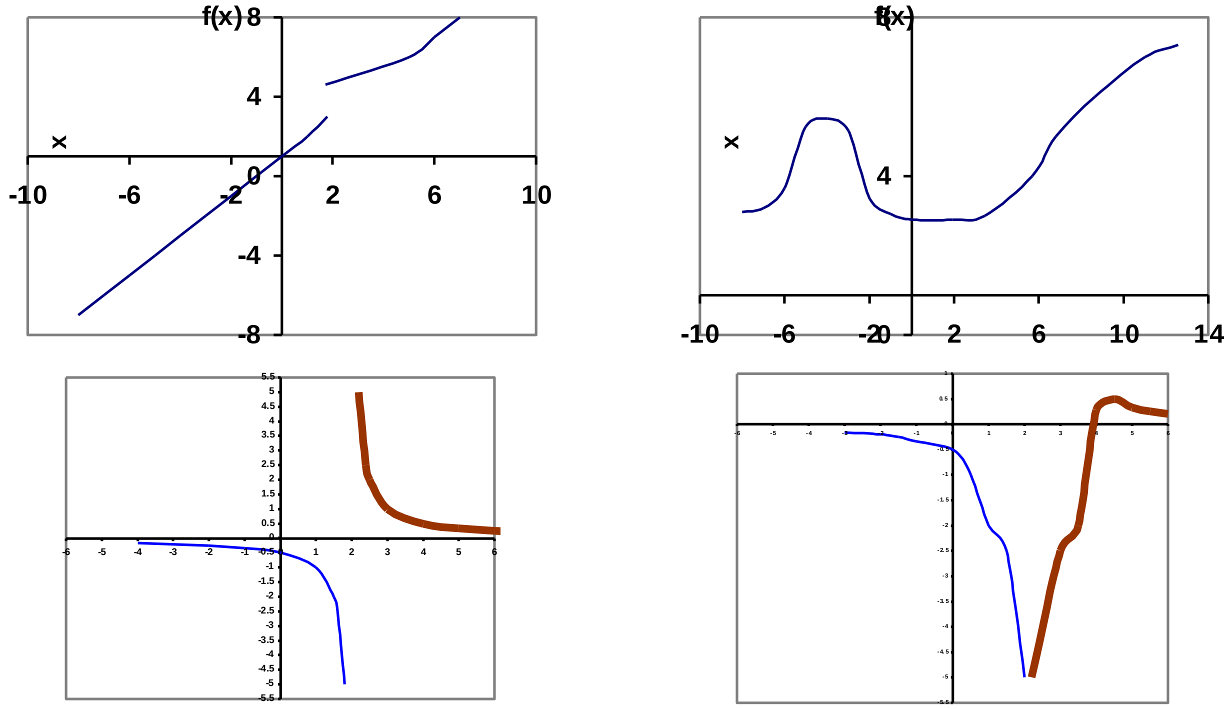
If whenever x gets close from x_o from either sides with $x\neq x_o$; f(x) gets close to l

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=l;l<\infty \quad iff;\forall\Sigma>0\exists\delta>0;|x-x_o|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\Sigma and\delta;\Sigma small\ \&>0$$

♍ تقرأ الصيغة السابقة(يوجد نهاية للدالة عند النقطة المحددة اذا وإذا فقط كان لكل ابيسلون اكبر من الصفر يوجد دلتا اكبر من الصفر) وتستخدم للاجابة عن سؤال يبدأ بالصيغة **Prove that** مثال :

Prove that: $$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

هل يوجد نهاية للدوال التالية ام لا عند $x_0 = ٢$؟ (الدوال على اليمين فقط لها نهاية عند $x_0 = ٢$)



Theory 1

Let L be a real number; L < ∞; f(x) is real valued function defined on the interval (a,b) containing the point xo then:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = l = \lim_{x\to x_o^-} f(x) = \lim_{x\to x_o^+} f(x) =; l<\infty$$

find Examples:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = |x|; \qquad \lim_{\Delta x\to 0} f(x) = \frac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x}; \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{|x|}{x}$$

عند حل مسائل النهايات يجب مراعاة

- عند وجود جذر فى الدالة نفكر فى المرافق فورا
- عند وجود دالة لها فترتين نوجد نهاية الدالة عند كل فترة
- نهاية كثيرات الحدود بالتعويض المباشر عند النقطة المعطاه
- عند ايجاد نهاية دالة لها قيمة مطلقة تعنى ايجاد النهاية عند فترتين
- فى الدوال الكسرية اذا كانت عند النهاية مالانهاية نقسم على اكبر اس فى المقام

الحل

$$1-\lim_{x\to 0} f(x) = \left\{ {}^{x\ge 0}_{x<0} \right\} \therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \therefore \therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$2-\lim_{\Delta x\to 0} f(x) = \frac{(\sqrt{4+\Delta x}+2)(\sqrt{4+\Delta x}-2)}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) = \frac{(4+\Delta x-4)}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2} \therefore = \frac{1}{2+0+2} = \frac{1}{4}$$

$$3-\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = x+1 = 2$$

$$4-\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{|\ x\ |}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{|\ x\ |}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = doesnotExist$$

Theory 2

If $p(x)=a1x^n+a2x^{n-1}+ \dots +a^{n-1}$ is a polynamd of degree n then

$$\lim_{x \to x_o} p(x) = a^1x^n + a^2x^{n-1} + \dots + a^{n-1}; x_o \in dom.p(x)$$

♍ الدالة كثيرة الحدود لها نهاية ونهايتها بالتعويض المباشر عن النقطة المعطاة

♍ فى المثال السابق اذا كانت **n**= ١ كانت الدالة خطية وإذا كانت = صفر كانت دالة ثابتة وتكون نهايتها دائما قيمة الثابت

<u>أمثلة</u>

find

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 1; \lim_{x \to 5} f(x) = 2x+1; \lim_{x \to 5} f(x) = x^2+2x+1$$

<u>الحل</u>

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 2*5+1=11$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 5^2+2*5+1=36$$

Theory 3

If c is real number and f(x) ; g(x) are real valued functions such as

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l1; \lim_{x \to x_o} g(x) = l2; l1 \,\&\, l2 < \infty$$

Then

$$1- \lim_{x \to x_o} f(x) = c \lim_{x \to x_o} f(x)$$

<u>الجمع والطرح والضرب والقسمة فى النهايات</u>

♍ نهاية المجموع الجبرى لدالتين هو المجموع الجبرى لنهاية الدالتين

♍ نهاية حاصل ضرب الدالتين هو حاصل ضرب نهاية الدالتين

$$2- \lim_{x \to x_o} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_o} f(x) \pm \lim_{x \to x_o} g(x)$$

$$3- \lim_{x \to x_o} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \to x_o} f(x) * \lim_{x \to x_o} g(x)$$

$$4- \lim_{x \to x_o} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to x_o} f(x) \right]^n$$

$$5- \lim_{x \to x_o} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to x_o} f(x)}{\lim_{x \to x_o} g(x)}; \lim_{x \to x_o} g(x) \neq 0$$

<u>إيجاد النهاية عند مالانهاية (limits at infinity)</u>

find

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$$

الحل (بالقسمة على اكبر اس فى المقام - صعبة التحليل-)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

المحاضرة الرابعة

If we let f(x) a real valued function and f(x)=g(x)/h(x) ; as x →∞ then f(x) will approach l where

1- l < ∞ if the largest power of h(x) = the largest power of g(x)
2- l =0 if the largest power of h(x) < the largest power of g(x)
3- l= ∞ if the largest power of h(x) > the largest power of g(x)

find

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{x^3+2x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\frac{x^3}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty+0+0}{1+0} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = doesnotEXIST$$

find

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^3+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{0+0+0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

حالات خاصة من النهايات

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1};\lim_{x\to a} f(x) = \frac{x^n-a^n}{x^m-a^m} = \frac{n}{m}a^{n-m}$$

ex.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{x5-243}{x^3-27} = \lim_{x\to 3} f(x) = \frac{x5-3^5}{x^3-3^3} = \frac{5}{3}3^{5-3} = \frac{45}{3} = 15$$

دالة صحيح x وهى الدالة التى نحذف فيها الكسر ولا نقربه وليس لها نهاية عند الأعداد الصحيحة ولكن لها نهاية عند الكسر

الاتصال Continuity الدالة متصلة عند نقطة اذا كانت معرفة عند هذه النقطة ومنحى الدالة يمر عند هذه النقطة دون انفصال

A function f(x) is defined and continuos at that point if it has garf moves unbroken through that point

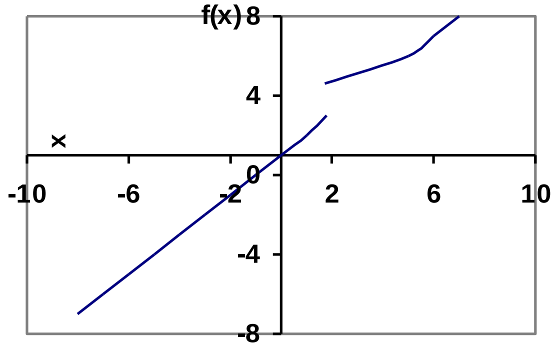
find

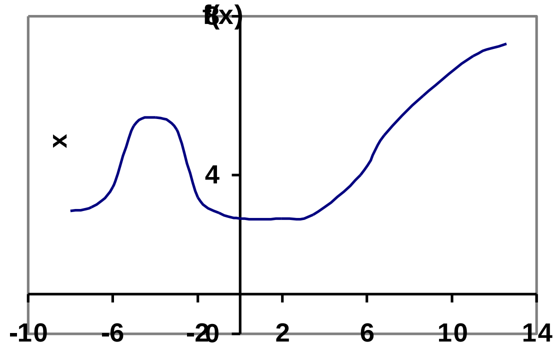
$$\lim_{x\to 2} f(x) = [x];\lim_{x\to 2.5} f(x) = [x]$$

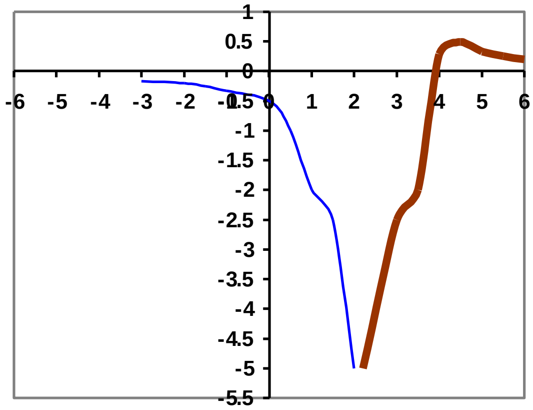
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \therefore doesnotEXIST$$

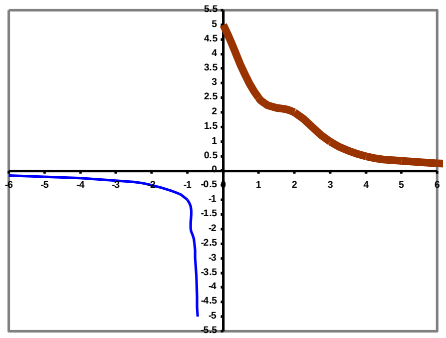
$$\lim_{x\to 2.5^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 2.5^+} f(x) = 2 \therefore \lim_{x\to 2.5} f(x) = 2$$

Find if this function is continuos at x = 2 (right ones are continuos)









Definition

Let f(x) be a real valued function defined for every point ;x $\in$ (a,b) the function f(x) is cts(continuos) at $x_o \in$ (a,b) if

1- $f(x_o)$ is defined

2- $\lim\limits_{x \to x_o}$ *exist*

3- $f(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o}$

Ex.

Show that f(x)= x^2 is cts at x=0

1- f(0)=0

2- $\lim(x^2)=0$

3- 1=2

امثلة:

$is\_f(x)cts?$

$1-f(x)=\frac{1}{x-1};x=1$

$2-f(x)=\frac{1}{x-1};x=3$

$3-f(x)=\sqrt{x};=0$

$1-f(x)=\frac{1}{1-1}=\infty notCTS$

$2-f(x)=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}(1)$

$\lim\limits_{x\to3}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}(2)$

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(x)CTS$

$3-f(x)=0(1)$

$\lim\limits_{x\to0^+}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}=notEXIST$

$notCTS$

Theory

If $p(x)=a1x^n+a2x^{n-1}+ \dots +a^{n-1}$ is a polynamd function of degree n and

$$\lim_{x \to x_o} p(x) = a^1x^n + a^2x^{n-1} + \dots + a^{n-1}; x_o \in dom.p(x)$$

Then p(x) is cts at every real number and $\lim_{x \to x_o} p(x) = p(x)$

If r(x) is a retional function ; r(x)= p(x)/q(x) then r(x) Is cts at every point $x_o \in R$ such that $q(x) \neq 0$

ex.

$$\lim_{x \to 3} p(x) = \frac{x5 + 3x^3 - 4x}{x2 - 5x + 6} = \frac{x5 + 3x^3 - 4x}{(x-3)(x-2)}$$

It means p(x) CTS on R- {2;3}

Definition

A function f(x) is cts over or in the open interval (a;b) if f(x) is cts at every point $x_o \in (a,b)$

Definition

A function f(x) is cts over or in the close interval (a;b) if f(x) is cts at every point $x_o \in [a,b]$ if

1-f(x) is cts in (a;b)

2- f(a);f(b) exist

3- lim f(x)=f(a);lim f(x)=f(b)

الاشتقاق هو
مقدار التغير فى المتغير التابع اذا تغير المتغير المستقل فى اى وقت (فعامل الزمن هنا اقل مايمكن ويقترب من الصفر) أو هو معدل تغير الدالة
بمعنى اخر هو نهاية الدالة، عندما يؤول التغير فى المتغير المستقل الى الصفر ويعبر عن ذلك رياضيا بالشكل التالى :

let f(x) be a real valued function defined in open interval (a,b) then the rate of change in y (

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

W.R.T.) with respect to

$$find \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$1 - f(x) = 2x^2 + 3$$

$$y' = 2 \cdot [2x]^1 + 0 = 4x$$

$$2 - f(x) = (2x^2 + 3)^2$$

$$y' = 2[2x^2 + 3]^1 = 4x^2 + 6 = 8x$$

$$3 - f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+3}} .(4x)$$

$$4 - f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$$

$$y' = \frac{(x-1).[2x] - (x^2+3).[1]}{(x^2+3)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 3}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2}$$

$$5 - f(x) = e^x \ln(2x+1)$$

$$y' = e^x .[\ln(2x+1).2] + \ln(2x+1).[e^x]$$

$$I - think - y' = 3e^x \ln(2x+1)$$

$$6 - f(x) = \frac{x^4 + 3}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x}[4x^3] - (x^4+3).\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$7 - f(x) = \ln e^{(5x^2+3x+1)}$$

$$y' = \frac{1}{e^{(5x^2+3x+1)}} .(e^{(5x^2+3x+1)}).(10x+3)$$

$$y' = (10x+3)$$

$$8 - f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} .(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$9 - f(x) = (\frac{x^2-4}{x-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}.(\frac{x^2-4}{x-1})^{\frac{1}{2}-1}.(\frac{(x-1).[2x] - (x^2-4)[1]}{(x-1)^2})$$

$$y' = \frac{1}{2}.(\frac{x^2-4}{x-1})^{-\frac{1}{2}}.(\frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}$$

$$if\, 2 - y = f(x) = c; c(cons\tan at)$$

$$prove - y' = 0$$

$$\because c(cons\tan t) \therefore f(x+\Delta x) = f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} \therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 \therefore y' = 0$$

$$if\, 3 - y = f(x) = e^x \, prove - y' = e^x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\because e^{\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x}{1} + \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{(\Delta x)^3}{3} + \ldots - 1$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \Delta x (1 + \frac{\Delta x}{1} + \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{(\Delta x)^3}{3} + \ldots)}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} e^x (1 + \frac{\Delta x}{1} + \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{(\Delta x)^3}{3} + \ldots)$$

$$\because \Delta x \to 0 \therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} e^x (1 + 0 + 0 + 0 + 0 \ldots) \therefore y' = e^x$$

Ex.

Very important definition
Let f(x) ; g(x) be two real valued functions over the open interval (a, b) and let c be a constant then

$$if\_y = f(x); x \to x+\Delta x \therefore y \to y+\Delta y$$

$$\therefore f(x) \to f(x+\Delta x)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y+\Delta y)-y}{(x+\Delta x)-x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$as \Delta x \to 0$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$note$$

$$if \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = y'', \frac{\Delta y^3}{\Delta x^3} = y'''$$

$$1 - y = f(x) = x^2$$

$$prove$$

$$y' = 2x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-x^2}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+\Delta x)(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x)$$

$$\because \Delta x = 0$$

$$\therefore y' = 2x$$

١- تفاضل الثابت = صفر
٢- تفاضل حاصل ضرب الثابت فى الدالة = حاصل ضرب الثابت فى تفاضل الدالة
٣- تفاضل مجموع أو طرح دالتين = مجموع أو طرح تفاضل الدالتين
٤- تفاضل حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى مضروبا فى تفاضل الثانية + الثانية مضروبا فى تفاضل الاولى

$$if\, 4 - y = f(x) = \sqrt{x}\ prove - y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \therefore y' = \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \because \Delta x = 0$$

$$\therefore y' = \frac{1}{(\sqrt{x+0}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$1-y'(u(x)^n)=n(u(x))^{n-1}.y'u(x)$$
$$2-y'(\sqrt{u(x)})=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}.y'u(x)$$
$$3-y'(e^{u(x)})=e^{u(x)}.y'u(x)$$
$$4-y'(a^{u(x)})=a^{u(x)}\ln a.y'u(x)$$
$$5-y'(\ln u(x))=\frac{1}{u(x)}.y'u(x)$$

$$1-y'(c)=0$$
$$2-y'(cf(x))=cy'f(x)$$
$$3-y'[f(x)\pm f(g)]=y'f(x)\pm y'f(g)$$
$$4-y'[f(x).f(g)]=f(x).y'f(g)+f(g).y'f(x)$$
$$5-y'[\frac{f(x)}{f(g)}]=\frac{f(x).y'f(g)-f(g).y'f(x)}{(f(g))^2}$$

٥- تفاضل ناتج قسمة دالتين(بسط ومقام) =ناتج طرح (المقام فى تفاضل البسط – البسط فى تفاضل المقام) مقسوما على مربع المقام
ويعبر عن هذه التعاريف رياضيا كما يلى ويليها عدة نتائج هامة جدا مع الامثلة :

$$prove-\frac{d}{dx}(e^{2x})=2e^{x^2}$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{2(x+\Delta x)})-f(e^{2x})}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{2x})(e^{2\Delta x}-1)}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{2x})(1+2\frac{\Delta x}{1}+2\frac{(\Delta x)^2}{2!}+2\frac{(\Delta x)^3}{3!}+...)-1)}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{2x})(1+2\Delta x+2(\Delta x)^2+\frac{2(\Delta x)^3}{3!}+...-1)}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{2x})(2\Delta x+2(\Delta x)^2+\frac{2(\Delta x)^3}{3!}+...)}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{2x}).2\Delta x(1+(\Delta x)+\frac{2(\Delta x)2}{3!}+...)}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}(e^{2x}).2\Delta x(1+(\Delta x)+\frac{2(\Delta x)2}{3!}+...)$$
$$\because \Delta x\to 0 \therefore \frac{dy}{dx}=2(e^{2x})(1+0+0+0+...)$$

$$1-y'(c)=0$$
$$2-y'(x)=1$$
$$3-y'(x^n)=nx^{n-1}$$
$$4-y'(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$5-y'(e^x)=e^x$$
$$6-y'(a^x)=a^x\ln a$$
$$7-y'(\ln x)=\frac{1}{x}$$

يمكن حل المثال السابق بسهولة عن طريق

$$prove - \frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}\ln e^{2x}.2$$

$$\because \ln e = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{2x}.(1)^{2x}.2 = 2e^{2x}$$

$$find\frac{d}{dx}(x^2)(x^2-3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)[2x]+(x^2-3)[2x]$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x^3)+(2x^3-6x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3-6x)$$

$$find\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{2x^2+3}}) \to (\sqrt{2x^2+3})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sqrt{2x^2+3})^{-\frac{1}{2}-1}.[4x] =$$

الدوال الضمنية : هى دوال لايوجد بينها علاقة مباشرة بحيث كل متغير فى طرف لكن يوجد علاقة غير مباشرة تعرف هذه الدالة بان المتغيرين موجودين معا ولايمكن فصلهما – وجود طرفين للمعادلة
عند ذلك نعتبر كل من المتغيرات دوال ونوجد تفاضل الطرفين ثم نحاول ان نفصل تفاضل الدالة بمفردة فى طرف

$$\frac{d}{dx}(y^2x^3+2yx) = \frac{d}{dx}(\frac{2}{x})$$

$$y^2[3x^2]+x^3[2(\frac{dy}{dx})]+2(y)[1](x)[1.\frac{dy}{dx}] = \frac{-2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}(x^3 2y+2x) = \frac{-2}{x^2} - y^2[3x^2]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-2}{x^2}-3y^2 3x^2}{(x^3 2y+2x)}$$

$$find\frac{dy}{dx} if - x^3 + y^3 = 6xy^4$$

$$x^3 3y^2(\frac{dy}{dx}) + 3x^2y^3 = 6x4y^3(\frac{dy}{dx}) + 6y^4$$

$$x^3 3y^2(\frac{dy}{dx}) - 6x4y^3(\frac{dy}{dx}) = 3x^2y^3 + 6y^4$$

$$(\frac{dy}{dx})(x^3 3y^2 - 6x4y^3) = 3x^2y^3 + 6y^4$$

$$(\frac{dy}{dx}) = \frac{3x^2y^3+6y^4}{(x^3 3y^2-6x4y^3)}$$

$y=x^x$ لايمكن حلها فنحولها الى ضمنية عن طريق ln y = x ln x
يمكن استخراج عدد لانهائى من المشتقات حتى اخر مشتقة والتى يكون تفاضلها = صفر

Chain Role

Consider y = f(x) ; x=g(t) find dy/dt
If Y has an indirect relation with t via (through) x then dy/dt = dy/dx*dx/dt

- **Note: we can get this result by multiply (dx/dx)**
- **x could be more than one factor**
- **we use the chain role to find the effect of each factor on the dependent variable**

- **قاعدة السلسلة**

اذا كانت هناك علاقة غير مباشرة بين متغيرين س ، ص كما توجد علاقة مباشرة بين احدهما ص ومتغير اخر ع فانه توجد علاقة غير مباشرة بين المتغير الاول س والمتغير الاخير ع ويكون تفاضل س بالنسبة لـ ع يساوى تفاضل س بالنسبة لـ ص مضروبا فى

تفاضل ص بالنسبة لـ ع وتستخدم قاعدة السلسلة عندما نريد معرفة تأثير كل متغير (عامل) مستقل بمفرده على المتغير التابع.

♍ **Ex. If y = 7x + 10 ; x = 3t –6 find dy/dt**

♍ اولا: بالتعويض بقيمة المتغير فى المعادلة

1. **by substitution y = 7(3t-6) + 10**
   y= 21t-42+10=21t-32
   y^=21

2. **by chain role dy/dt = dt/dx * dx/dt**

♍ ثانيا: باستخدام قاعدة السلسلة

dy/dt = (7).(3) = 21

$$Ex.$$

$$if - y = \frac{5x^2+1}{x^3-1}; x = e^{5t} \ldots find \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = (\frac{dy}{dx}) \times (\frac{dx}{dt})$$

$$\frac{dy}{dt} = (\frac{(x^3-1)[10x]-(5x^2+1)[3x^2]}{(x^3-1)^2}) \times (5e^{5t})$$

$$then....substitute$$

$$\frac{dy}{dt} = (\frac{(5e^{15t}-1)(50e^{5t})-(25e^{5t^2}+1)(15e^{5t^2})}{(5e^{15t}-1)^2}) \times (5e^{5t})$$

♍ **Ex. If y = 5x2+1/x3-1 x = e5t find dy/dt**

♍ **<u>Increasing and decreasing function</u>**

<u>تزايد وتناقص الدالة (اضطراد الدالة)</u>

The function y = f(X) which is defined on [a,b] is said to be:

الدالة المعرفة فى الفترة المفتوحة (ا ، ب) يقال انها :-

♍ **Increasing if wherever a ≤ x1≤x2≤b (dy/dx >0 plus+)**

♍ تزايدية اذا كانت النقطة أ اصغر من أو تساوى اى نقطة تالية لها واى نقطة تاليه لها اصغر من أو تساوى النقطة ب وتكون المشتقة الاولى لها (تفاضل هذه الدالة اكبر من الصفر)

♍ **decreasing if wherever a ≥ x1≥x2≥b (dy/dx <0minus-)**

♍ تناقصية اذا كانت النقطة أ اكبر من أو تساوى اى نقطة تالية لها واى نقطة تاليه لها اكبر من أو تساوى النقطة ب وتكون المشتقة

$$Ex.$$

$$if - y = \frac{5x^2+1}{x^3-1}; x = e^{5t} \ldots find \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = (\frac{dy}{dx}) \times (\frac{dx}{dt})$$

$$\frac{dy}{dt} = (\frac{(x^3-1)[10x]-(5x^2+1)[3x^2]}{(x^3-1)^2}) \times (5e^{5t})$$

$$then....substitute$$

$$\frac{dy}{dt} = (\frac{(5e^{15t}-1)(50e^{5t})-(25e^{5t^2}+1)(15e^{5t^2})}{(5e^{15t}-1)^2}) \times (5e^{5t})$$

الاولى لها (تفاضل هذه الدالة اصغر من الصفر)

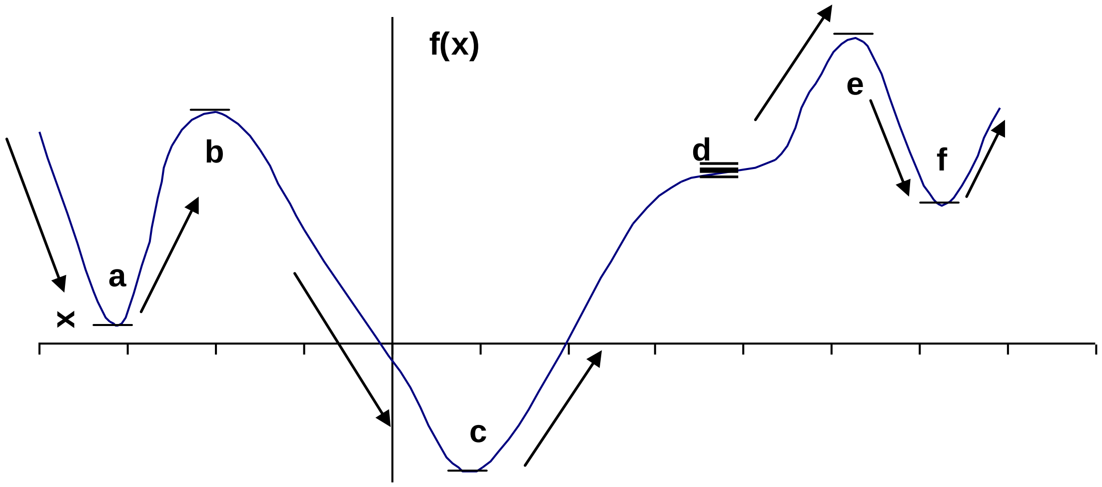
<u>the critical points</u>

Let f (x) be a real valued function defined on the interval [a , b] and let x_o is an element ; x_o є (a , b) then x_o called a critical point of f(x) if dy/dx =0 or dy/dx does not exist and

<u>النقطة الحرجة : </u>يقال ان النقطة س نقطة حرجة للدالة عندما يكون تفاضل الدالة عند هذه النقطة يساوى الصفر أو غير موجود

- **if (dy/dx =0) then it is a quiet point (could be a critical or inflection point)**
- مع ملاحظة انه اذا كانت المشتقة الاولى للدالة (تفاضل الدالة) تساوى صفر فان الدالة تكون فى لحظة سكون (سكون الدالة) وهذه النقطة (اما تكون نهاية عظمى أو صغرى واما تكون نقطة انقلاب)

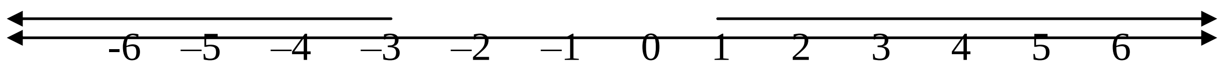
- <u>**Maximum ;Minimum And Inflection Points (First Method)**</u>
- **watch this diagram for the function y = f(x) and notice**
- <u>النهايات العظمى والصغرى ونقاط الانقلاب (الطريقة الاولى)</u>
- لاحظ شكل الدالة التالية ولاحظ :-
  - **points a;b;c;d;e;f is a quiet point (dy/dx=0)critical or inflection points**
  - النقاط **a;b;c;d;e;f** نقاط سكون للدالة فيها تفاضل الدالة يساوى صفر قد تكون هذه النقاط نهايات أو نقاط انقلاب
  - **if after a quiet point dy/dx >0 and before it dy/dx <0 then it is a minimum point (a , c , f)**
  - اذا كان تفاضل الدالة بعد نقطة سكون معينة لها اكبر من الصفر (موجب) وتفاضلها قبلها اصغر من الصفر (سالب) كانت هذه النقطة نهاية صغرى **(a , c , f)**
  - **if after a quiet point dy/dx <0 and before it dy/dx >0 then it is a maximum point (b , e)**
  - اذا كان تفاضل الدالة بعد نقطة سكون معينة لها اقل من الصفر (سالب) وتفاضلها قبلها اكبر من الصفر (موجب) كانت هذه النقطة نهاية عظمى **(b , e)**
  - **if after a quiet point or before it dy/dx is going to the same trend then it is an inflection point (d)**
  - اذا كان تفاضل الدالة بعد أو قبل نقطة السكون فى نفس الاتجاه (موجب أو سالب) كانت هذه النقطة نقطة انقلاب حيث يتغير فيها تحدب أو تقعر منحنى الدالة فقط **(d)**.



Ex. (Find critical points and determine there nature by the first derivative)
Let $y = f(x) = x^3+3x^2-9x-10$ for what values of x is this function increasing and decreasing

مثال : عند اى قيم للدالة السابقة تكون الدالة تزايدية أو تناقصية
الحل : اولا : نحدد تفاضل الدالة ، ثانيا :نساوى النتيجة بالصفر ، ثالثا : نحدد قيم المتغير التى تجعل تفاضل الدالة الأصلية تساوى صفر (بتحديد العوامل التى تجعل تفاضل الدالة الأصلية يساوى الصفر) ، رابعا نرسم فترات اضطراد الدالة على خط الأعداد ، أو : نكمل جدول اضطراد الدالة وحسب اشارة تفاضل الدالة يكون اضطراد الدالة فاذا كانت اشارة تفاضل الدالة موجبة كانت الدالة تزايدية وإذا كان تفاضل الدالة سالبا كانت الدالة تناقصية .

$dy/dx = 3x^2+6x+9$ ………………… (1)
$0 = 3x^2+6x-9$ ……………………… (2)
$0 = 3(x^2+2x-3)$ ….. ……………………
$0 = (x+3) (x-1)$ ….. ……………………
$(x+3)=0$ or $(x-1) = 0$ ……………………
$x=-3$ or $x=1$ ………………………..(3)



- **from this diagram we note that the function has 3 periods …. (4)**

♍ X < -3 ; X > 1 and -3 < x < 1 and the value of dy/dx is explained in the next table

♍ من رسم الدالة على خط الأعداد نلاحظ انه يوجد ٣ فترات للدالة الاولى عند قيم المتغير اكبر من والثانية عند القيم اقل من –٣ والثالثة الفترة بين القيمتين ويشرح الجدول التالى كيفية استنتاج اشارة تفاضل الدالة حيث تكون اشارة تفاضل الدالة عبارة عن حاصل ضرب اشارة المقدار X+3 فى اشارة المقدار X-1 كما يمكن تمثيل النقاط الحرجة بالجدول كما هو موضح بالجدول التالى :

X values	X + 3 sign	X – 1 sign	Dy/dx sign	F(x) status
X < -3	If x<-3 then x+3 sign is -	If x<-3 then x-1 sign is -	(-)(-)=+	Increasing ∨
X = -3	0	If x=-3 then x-1 sign is -	0	Critical point λ
-3 < x < 1	If –3 < x <1 then x+3 sign is +	If –3<x<1 then x-1 sign is -	(+)(-)=-	Decreasing ¬
X = 1	If x=1 then x+3 sign is -	0	0	Critical point λ
X > 1	If x>1 then x+3 sign is +	If x >1 then x-1 sign is +	(+)(+)=+	Increasing ∨

♍ ملاحظة : يمكن تحديد ما اذا كانت نقطة السكون نقطة نهاية عظمى أو صغرى أو انقلاب بمعرفة اشارات تفاضل الدالة قبل وبعد نقطة السكون ففى الجدول السابق تكون النقطة X=-3 قبلها تفاضل الدالة موجب وبعدها تفاضل الدالة سالب فتكون نقطة نهاية عظمى والنقطة X=1 قبلها تفاضل الدالة سالب وبعدها تفاضل الدالة موجب فتكون نقطة نهاية صغرى ويمكن تمثيلها فى الجدول مباشرة فبدلا من كتابتها انها نقطة حرجة يمكن كتابتها نهاية عظمى أو نهاية صغرى على الترتيب.

♍ Maximum ;Minimum And Inflection Points (Second Method)

♍ A function f(x) on the interval (a,b) such that x_o є (a , b) has :-

♍ 1- local maximum point if (a- $dy/dx(x_o) = 0$, b- $dy^2/dx(x_o) < 0$)

♍ 2- local minimum point if (a- $dy/dx(x_o) = 0$, b- $dy^2/dx(x_o) > 0$)

♍ 3- Inflection point (could be) if (a- $dy/dx(x_o) = 0$, b- $dy^2/dx(x_o) = 0$ or does not exist)

♍ **النهايات العظمى والصغرى ونقاط الانقلاب (الطريقة الثانية)**

♍ الدالة المعرفة فى الفترة المفتوحة (أ ، ب) لها

♍ ١- نقطة نهاية عظمى اذا (أ- اذا كانت المشتقة الاولى عند النقطة المحددة = ٠ ، ب – المشتقة الثانية لها عند نفس النقطة اقل من ٠)

♍ ٢- نقطة نهاية صغرى اذا (أ- اذا كانت المشتقة الاولى عند النقطة المحددة = ٠ ، ب – المشتقة الثانية لها عند نفس النقطة اكبر من ٠)

♍ ٣- نقطة انقلاب اذا (أ- اذا كانت المشتقة الاولى عند النقطة المحددة = ٠ ، ب – المشتقة الثانية لها عند نفس النقطة = ٠ أو غير موجودة)

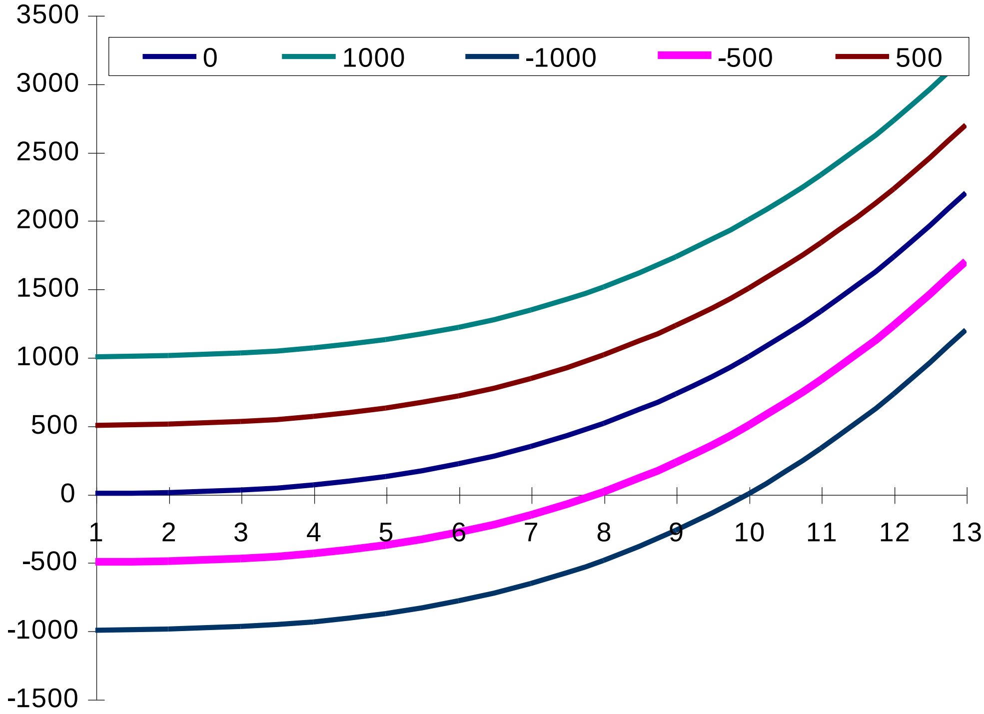
♍ Ex. Find critical points and determine there nature by the second derivative

$Y=x^4-8x^2$

الحل : اولا: نوجد المشتقة الاولى ، ثانيا : نحدد قيم المتغير التى تجعل المشتقة الاولى تساوى صفر ، ثالثا : نوجد المشتقة الثانية للدالة ، رابعا : نعوض عن القيم التى جعلت المشتقة الاولى تساوى صفر فى المشتقة الثانية لايجاد قيم المشتقة الثانية ، خامسا : نحدد قيم المتغير التى تكون عندها الدالة لها قيم حرجة ونوعها ، خامسا: نعوض بقيم النقاط الحرجة فى الدالة الاصلية (لماذا ..... ؟)

dy/dx = $4x^3$-16x ……………………..(1)
dy/dx = $4x(x^2-4)$
dy/dx = 4x(x-2)(x+2)
0 = 4x(x-2)(x+2)
x = 0 or x = -2 or x = -2 …………… (2)
$dy^2/dx = 12x^2-16$ …………………….. (3)
dy^2/dx (0) = 12 (0)^2 –16 = -16 so dy^2/dx (0) is maximum point …. (4-1)
dy^2/dx (-2) = 12 (-2)^2 –16 = 32 so dy^2/dx (0) is minimum point…. (4-2)
dy^2/dx (+2) = 12 (2)^2 –16 = 32 so dy^2/dx (0) is minimum point…. (4-3)
$Y=x^4-8x^2$
Y(0) =0-0 = 0
Y(-2) =(-2)^4 –8 (-2)^2 = -16
Y(2) =(2)^4 –8 (2)^2 = -16

سوال مهم لماذا اعوض عن قيم المتغير فى الدالة الاصلية بقيم النقاط الحرجة؟؟؟



التكامل

هو العملية العكسية للتفاضل مع الاخذ فى الاعتبار الشروط الاولية (الاساسية) للدالة وترجع اهمية علم التكامل فى ايجاد المساحات فى المعادلات التفاضلية أو المساحات اسفل المنحنيات

استخدم التكامل منذ زمن بعيد حيث استخدمه الملك احمس لايجاد مسطح كرة قطرها ٩ وحدات باستخدام مساحة مربع طول ضلعه ٨ وحدات واستخدمه بعد ذلك ارشميدس

مثال توضيحى لكيفية ايجاد تكامل دالة

اوجد تكامل الدالة $3X^2$ وارسمها

لايجاد تكامل دالة بسيطة مثل هذه الدالة كل ماعلينا ان نزيد واحد على الاس ونقسم على الاس الجديد (عكس التفاضل حيث كنا نجعل اس المتغير هو معامله ونطرح من اسه واحد) ثم نضيف ثابت

الحل

X^3+C

على ذلك : اى من هذه المنحنيات يمثل هذه الدالة

كل المنحنيات تمثل الدالة السابقة الا اذا وجد شرط أو شروط للدالة الاساسية مثل؟ $F(0)=0$

فى هذه الحالة يكون الثايت يساوى صفر

وتكون الدالة الاصلية بعد التكامل $F(X)= X^3$

$$Let - K = \text{Constant}$$

$$\int K dx = Kx + c$$

$$\int x^{r-1} dx = \frac{x^r}{r} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int K f(x) dx = K \int K(x) dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

١- تكامل دالة فى ثابت = الثابت فى تكامل الدالة (تستخدم فى تسهيل التكامل)

٢- تكامل الجمع الجبرى لدالتين = المجموع الجبرى لتكامل الدالتين

٣- تكامل الثابت = الثابت فى اكس + ثابت اخر
٤- توجد قواعد اخرى لتسهيل عمليات التكامل موضحة كالتالى:

$$\int[f(x)^n f'(x)]dx = \frac{f(x)^{n+1r}}{n+1} + c$$

$$\int[\frac{1}{f(x)} . f'(x)]dx = \ln f(x) + c$$

$$\int[e^{f(x)} . f'(x)]dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{x}{5x^2+3}dx \ldots Let \ldots 5x^2+3 = u$$

$$\int \frac{x}{u}dx \ldots = \frac{1}{10}\int \frac{10x}{u}dx \ldots = \frac{1}{10}\int \frac{f'(u)}{u}du \ldots = \frac{1}{10}\ln u + c \ldots = \frac{1}{10}\ln 5x^2 + c \ldots$$

أمثلة

$$Integrate - Find$$

$$\int[\frac{3}{x^2} + 6x^2]dx = 3\int[\frac{1}{x^2} + 2x^2]dx = 3(\frac{x^{-1}}{1-} + \frac{2x^3}{3}) = \frac{-3}{x} + 2x^3 + c$$

$$\int 2xdxThat\,\Pr ossesThrou\,gh(2,7) = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$$

$$\because\ x = 2; f(x) = 7 \therefore 2^2 + c = 7 \therefore c = 3 \therefore\ f(x) = x^2 + 3$$

سقطت كرة من ارتفاع معين وكانت سرعتها حسب المعادلة 32t احسب المسافة التى قطعتها بعد خمس ثوانى
فى هذا المثال لاحظ مايلى:
١- السرعة عبارة عن التغير فى المسافة بالنسبة للزمن
٢- عند الزمن صفر كانت المسافة المقطوعة صفر والسرعة صفر
٣- التكامل يلغى التغير
٤- الحل (سنرمز للسرعة بالرمز v والزمن t والمسافة s

$$v = \frac{ds}{dt} = 32t \therefore \int ds = \int 32tdt \therefore s = 16t^2 + c$$

$$at0timeWas0d \therefore 0 = 16(0)^2 + c \therefore s = 16(t)^2\,After5Seconds\_s = 16(5)^2 = 400\,feet$$

امثلة اخرى

$$find$$

$$1 - \int 3x^{\frac{11}{3}}dx = 3\int x^{\frac{11}{3}}dx = 3\frac{x^{\frac{11}{3}+\frac{3}{3}}}{14/3} + c = \frac{9x^{\frac{411}{3}}}{14} + c$$

$$2 - \int(1+2x)^2 dx = \frac{1}{2}\int[(1+2x)^2](2)dx = \frac{1}{2}\frac{(1+2x)^3}{3} + c = \frac{(1+2x)^3}{6} + c$$

$$3 - \int(1+t^2)^{\frac{12}{9}}tdt = \frac{1}{2}\int[(1+t^2)^{\frac{12}{9}}(2t)]dt = \frac{1}{2}\frac{(1+t^2)^{\frac{12}{9}+\frac{9}{9}}}{\frac{20}{9}} + c = 9\frac{(1+t^2)^{\frac{20}{9}}}{40} + c$$

لاحظ انه فى المثال رقم ٢ ، المثال رقم ٣ حاولنا تحويل الدالة التى اعمل لها تكامل الى دالة مضروبة فى تفاضلها وذلك لتسهيل التكامل ويفضل كتابة القاعدة التى استخدمناها وهى بالشكل التالى :

$$\int[f(x)^n f'(x)]dx = \frac{f(x)^{n+1r}}{n+1} + c$$

انواع التكامل

١- التكامل المباشر (ماسبق)
٢- التكامل بالتعويض

وفيه نرمز للدالة برمز ونكمل التكامل على ذلك ثم فى نهاية التكامل نرجع الرمز الى اصله (الدالة)

$$\int \frac{x}{x+1}dx \ldots Let \ldots x+1=u$$

$$\int \frac{x+1-1}{u}dx \ldots = \int \frac{x+1}{u}-\frac{1}{u}dx \ldots = \int \frac{u}{u}-\frac{1}{u}dx \ldots = \int 1-\frac{1}{u}dx \ldots = 1-\ln u+c = 1-\ln(x+1)+c$$

٣- التكامل بالتجزيء

ويستخدم لتسهيل التكامل فى الدوال التى لايمكن اختصارها وفيه يتم تجزيء الدالة الى دالة منتهية وتسمى u ودالة اخرى تنتهى أو لاتنهى ليس مهما وتسمى v ونستخدم فيها القاعدة التالية : (مهم جدا ان تكتبها)
حيث يكون du=dx ويسخدم التكامل بالتجزيء فى حل تكاملات الدوال ln

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^{x}dx$$

$$let \cdots u = x, e^{x}dx = dv$$

$$TheRole \cdots \int udv = uv - \int vdu$$

$$= xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + c = (x-1)e^{x} + c$$

$$\int \ln xdx$$

$$\ln x = u = \frac{1}{x}dx \cdots dv = dx = x$$

$$TheRole \cdots \int udv = uv - \int vdu$$

$$x\ln x - \int vdu.x(\frac{1}{x})dx$$

$$= x\ln x - x + c$$

مثال

هذا المثال يحتاج الى مراجعة

$$\int x^{2}e^{x}dx$$

$$let \cdots u = x^{2}, e^{x}dx = dv$$

$$TheRole \cdots \int udv = uv - \int vdu$$

$$= x^{2}e^{x} - \int 2xe^{x}dx + c = x^{2}e^{x} - 2xe^{x} + c = (x^{2}-2x)e^{x} + c$$

$$TheRole \cdots \int udv = uv - \int vdu$$

$$= (x^{2}-2x)e^{x} - \int(2x-2)e^{x}dx + x + c = (x^{2}-2x)e^{x} - (2x-2)e^{x} + x + c = (x^{2}-2)e^{x} + x + c$$

اوجد تكامل الدالة

$$\int f(xe^{-2x^2+3})dx \cdots u = e^{-2x^2+3} = \int xudx = \frac{1}{-4}\int u(-4x)dx = \frac{1}{-4}u + c = \frac{1}{-4}e^{-2x^2+3} + c$$

التكامل المحدود

$$_b^a\int f(x)dx = F(a) - F(b)$$

اذا كانت الدالة متصلة فى الفترة (a,b) وقابلة للتكامل فى هذه الفترة فان المساحة اسفل منحنى هذه الدالة بين هاتين النقطتين يساوى المعادلة المقابلة
ثوابت التكامل المحدود

$$_b^a\int dx = (a-b)$$

$$_b^a\int cdx = c(a-b)$$

$$_b^a\int f(x)dx = 0$$

$$_b^a\int f(x)dx = {}_c^a\int f(x)dx + {}_b^c\int f(x)dx; c \in (a,b)$$

$$_b^a\int f(x)dx = -{}_a^b\int f(x)dx$$

مثال
اوجد المساحة المحصورة بين النقطتين ١، ٣ اسفل المنحنى $y=x^2+1$
الحل
١- نوجد التكامل
٢- نكتب قاعدة التكامل المحدود
٣- نعوض بالقيم العظمى والصغرى (١،٣)
التفاصيل بالمعادلات المرفقة

$$y = x^2 + 1$$

$$A = {}_1^3\int(x^2+1)dx$$

$$A = \frac{x^3}{3} + x + c$$

$$_b^a\int f(x)dx = F(a) - F(b)$$

$$_1^3\int(x^2+1)dx = F(3) - F(1)$$

$$_1^3\int(x^2+1)dx = [\frac{x^3}{3} + x + c]_1^3$$

$$_1^3\int(x^2+1)dx = (\frac{3^3}{3} + 3 + c) - (\frac{1^3}{3} + 1 + c)$$

$$_1^3\int(x^2+1)dx = (12 + c - 1\frac{1}{3} - c)$$

$$A = 12 - \frac{4}{3} = 10\frac{2}{3}$$