الفصل الاول

الاقتصاد الرياضي (mathematical economics)

- ❖ **اولا :- مفهوم الاقتصاد الرياضي .**
- ❖ **ثانياً :- المتغيرات والدوال .**
- ❖ **ثالثاً :- النماذج الاقتصادية .**

❖اولاً - مفهوم الاقتصاد الرياضي :

هو ليس فرعاً من فروع اقتصاد المعرفة كالاقتصاد الجزئي او الكلي او الاقتصاد الاقطاعي كالاقتصاد الزراعي والصناعي او السياسات الاقتصادية كالمالية والنقدية والدولية .أنما هو اداة تحليليه فحسب او هو منهج للتحليل الاقتصادي تستخدم بموجبها الرموز والتعبيرات الرياضية .

وبعباره اخرى ، الاقتصاد الرياضي هو العلم الذي يختص بصياغة النظريات الاقتصادية بأسلوب رياضي والتعبير عن العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية ليس بالوصف كما هو الحال بالتحليل الاقتصادي التقليدي انما هو باستخدام الرموز الرياضية.

❖ مزايا استخدام الرياضيات في الاقتصاد

ينجم عن استخدام الاسلوب الرياضي في الاقتصاد العديد من المزايا منها :

1- تجنب الافتراضات الضمنية التي يصعب اكتشافها وجعلها اكثر صراحة .
2- اختصار والدقة في عرض العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية .
3- التعامل مع عدد الكبير من المتغيرات وعدم الاقتصار على عدد محدد منها

❖العلاقة بين الاقتصاد الرياضي والقياسي

يمكن توضيح العلاقة بين الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي ببعض الشئ ، فالاقتصاد الرياضي يصنع النظرية الاقتصادية في صيغ رياضية او بشكل معادلات تأخذ اشكال دالية مختلفة كما هو الحال في دالة الاستهلاك مثلاً ، والتي تعتبر دالة الاستهلاك هي داله للدخل **(c=a+by)** . أما الاقتصاد القياسي يختلف بصيغة الرياضية حيث تعتبر ان هذه العلاقات ليست دقيقة تماماً بل انها تتضمن متغيرات لا يمكن قياسها بدقة ، ويطلق عليها المتغيرات العشوائية وهذا يعني ان المتغيرات العشوائية (u) هو العنصر الذي يميز الاقتصاد القياسي والاقتصاد الرياضي كما في الداله التالية : **(c=a+by + u)**.

❖ ثانياً - المتغيرات والدوال .

1- **المتغير (variables)** :هو الشئ الذي يكون مقداره قابل للتغير أي انه عدد غير محدود يأخذ قيما متعدد تختلف عن بعضها البعض لذى فأنه من الممكن ان يرمز له برمز معين بدلاً من عدد معين مثلاُ (الكمية المطلوبة (Qd) ، الايراد (R) ، الكلفة (C)) ،

2- **الدوال (the functions)**: الداله هو تعبير عن العلاقة بين متغيرين او اكثر بالرمز مثلاً ((Y=f(X)) فحين يقال ان المتغير (y) دالة للمتغير (X) يعني ان المتغير (y) يعتمد على المتغير (X) وفي هذه الحالة يدعى المتغير (y) بالمتغير التابع ويدعى المتغير (X) بالمتغير المستقل ويمكن التعبير عنها رياضياً حسب الداله
(Y=f(X)

❖ انواع المتغيرات

أ- المتغيرات الداخلية : هي المتغيرات التي تؤثر في النموذج وتتأثر به وتتحدد قيمتها من داخل النموذج وتسمى بالمتغيرات التابعة Y=C+I+GO

ب- المتغيرات الخارجية :_هي المتغيرات التي تؤثر في النموذج ولا تتأثر بة وتتحدد قيمتها من خارج النموذج .

Qd=a-bp

Qs= -c + dp

Qd =Qs

انواع الدوال

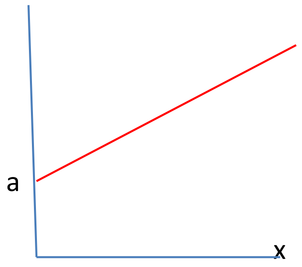
يمكن تقسيم الدوال الى عدة تقسيمات ، فقد تقسم من حيث عدد متغيراتها الى دوال ذات متغير واحد او ذات عدة متغيرات ، كما يمكن ان تقسم الى دوال خطية ودوال غي خطية :

أ: الدوال الخطية : وهي الدالة التي يكون شكلها البياني على شكل خط مستقيم لان معادلاتها من الدرجة الاولى . Y= a + bx

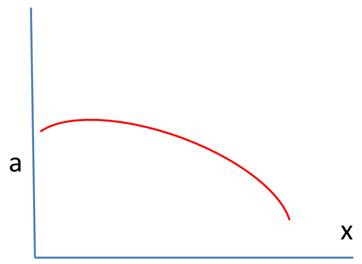
ب: الدوال الغير خطيه : وهي الدالة التي يكون شكلها البياني غير مستقيم ويظهر فيها المتغير المستقل مرفوعاُ الى قوة اكثر من واحد وهي دوال من الدرجة الثانية (وتسمى الدالة التربيعية) او دوال من الدرجة الثالثة (وتسمى بالدالة التكعيبية)

$$Y= 12 + x^2$$

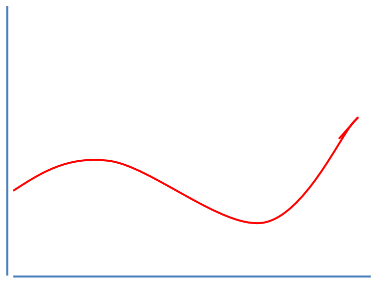
$$Y= 25 + x^3$$



الدالة الخطية



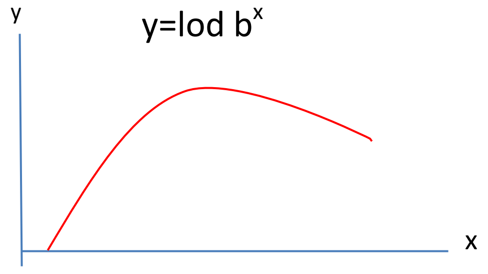
الدالة التربيعية



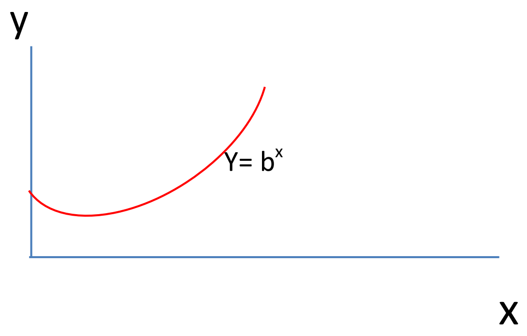
الدالة التكعيبيه

وهناك اشكال اخرى من الدوال مثلا :-

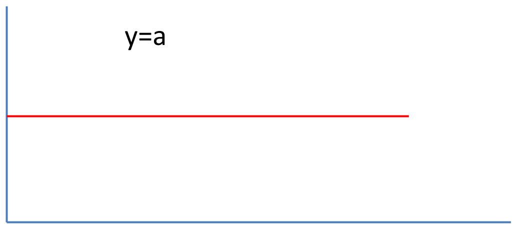
- ✓ الدوال الوغارتمية



- ✓ الدوال الاسية



- ✓ الدوال الثابتة



❖ ثالثاً :- النماذج الاقتصادية . Economic models

يقصد بالنموذج الاقتصادي هو تبسيط للواقع الاقتصادي بشكل خالي من التعقيدات وهو يشير الى مجموعه من العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية ولكن بشكل موجز وهذا هو الهدف من وضع النموذج ويهدف الى التنبؤ او تقييم سياسة اقتصادية معينة او تحليل الهيكل الاقتصادي .

❖ اهداف النموذج الاقتصادي

1- يمكن استخدامها كأدوات في عملية التنبؤ .
2- يمكن استخدامها في تقييم سياسة اقتصادية قائمه او مقترحه .
3- يمكن استخدامها في عملية تحليل الهيكل الاقتصادي .

(((((الفصل الثاني)))))

تحليل التوازن في الاقتصاد

اولاً : التوازن الجزئي في السوق (partial market equilibrium)
ثانياً : نماذج تحديد الدخل (Income determination models)
ثالثاً : نموذج السوق غير الخطي (non- linear market models)

معنى التوازن (the meaning equilibrium) : هو الوضع الذي تستقر عنده الوحدة الاقتصادية بحيث لا يكون لديها أي حافز او دافع في الانتقال الى وضع اخر . والمقصود في توازن السوق ، الوصول الى حالة التي يكون فيها قوى العرض والطلب على السلع عند وضع الاستقرار .

اولاً : التوازن الجزئي في السوق (partial market equilibrium)

تعلمنا من الاقتصاد الجزئي عرض المفاهيم الاقتصادية بطريقة التحليل الوصفي اما بالنسبة الى الاقتصاد الرياضي يحاول عرضها بصيغة رياضية .

أ : النموذج الخطي A linear model : وهو نموذج بسيط تكون جميع العلاقات التي تربط المتغيرات فيه خطية ، ويسهل تقدير معلماتها ويمكن حلة بالطرق التالية :

الطريقة الاولى **((بناء النموذج)) :** فيما يلي نموذج مبسط لسوق سلعة ما يتكون ثلاث علاقات هي (دالة الطلب demand function ، دالة العرض supplied function ،شرط التوازن equilibrium condition) ، وبما ان هناك سلعة واحدة فأن من الضروري ان يتضمن ثلاث متغيرات فقط هي (الكمية المطلوبة the quantity demanded ، الكميه المعروضة the quantity supplied ، السعر price) ان طلب السوق يعني الطلب الكلي او الفعلي على السلعة من قبل جميع المشترين (المستهلكين) خلال فتره زمنية معينة وبمختلف الاسعار ، وان قانون الطلب ينص على وجود علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة والسعر وفق الصيغة التالية :

$$Qd = a - bp \qquad (a, b > 0)$$

أما عرض السوق يعني الكميات الكلية المعروضة من قبل جميع المنتجين في فتره زمنية معينة بالأسعار المختلفة وفق الصيغة التالية $Qs = -c + dp \quad (c, d > 0)$

لو افترضنا ان الكمية المطلوبة (Qd) تكون دالة خطية متناقصة للسعر (أي عندما يزداد p فان الكمية المطلوبة تتناقص) او من ناحية اخرى الكمية المعروضة (Qs) تكون دالة متزايدة (أي عندما يزداد السعر فأن الكمية المعروضة تزداد ايضاَ)، وبناء على هذا فأن النموذج الخطي يشترط التوازن اضافة الى معادلتين سلوكيتين ويمكن كتابتهما بالطريقة التالية :

$$\mathbf{Qd = a - bp \qquad (a , b > 0)}$$

$$\mathbf{Qs = -c + dp \quad (c, d > 0)}$$

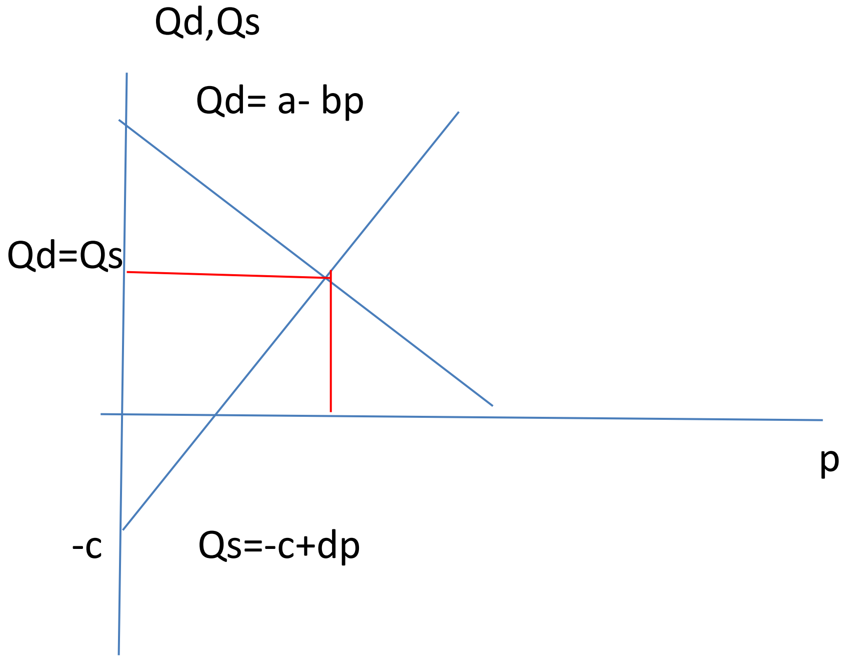
$$\mathbf{Qd = Qs}$$

الطريقة الثانية ((حل نموذج التوازن Solution equilibrium model))

مما تقدم نجد ان نموذج السوق يتكون من معادلتين العرض والطلب مضافاً اليها شرط التوازن ، والمطلوب هو حل النموذج أي معرفة قيم (Qd , Qs , P) أي القيم التوازنية لهذه المتغيرات ، ويمكن حل التوازن بطرقتين :

أ : حل النموذج بيانياً (solution model graphically).

ان حل النموذج بيانياً يمكن ان يتم عند جمع دالة العرض مع دالة الطلب في شكل بياني واحد وفية يبين ان هناك سعر واحد فقط تتساوى فيه الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة هذا السعر يتحدد بتقاطع منحني الطلب مع منحنى العرض وبالشكل التالي يبين فيه تحديد سعر التوازن والكمية التوازنية .



ب : حل النموذج رياضياً

من خلال معادلات الطلب والعرض والتوازن يمكن حل النموذج رياضياً

$Qd = a - bp \ldots \ldots .1$

$Qd = -c + dp \ldots \ldots .2$

$Qd = Qs \ldots \ldots \ldots \ldots .3$

من خلال شرط التوازن نحصل على المعادلة التالية

$a - bp = -c + dp$

$a + c = p(b + d)$

$p = \frac{a+c}{b+d}$ 4

والايجاد الكمية التوازنية نعوض معادلة سعر التوازن في الكمية التوازنية أي نعوض معادلة (4) في معادلة (1)

$Q = a - \frac{b(a+c)}{b+d}$

$= \frac{a\,(b+d\,)-b\,(\,a+c\,)}{b+d}$

$= \frac{ab+ad-ba-bc}{b+d}$ الكمية التوازنية $Q = \frac{ad-bc}{bd}$ 6

وتكون النتيجة نفسها لو عوضنا في دالة العرض

Ex //found price and quantity equilibrium in model follong

Qd = Qs.....1

Qd = 10 – 2p......2

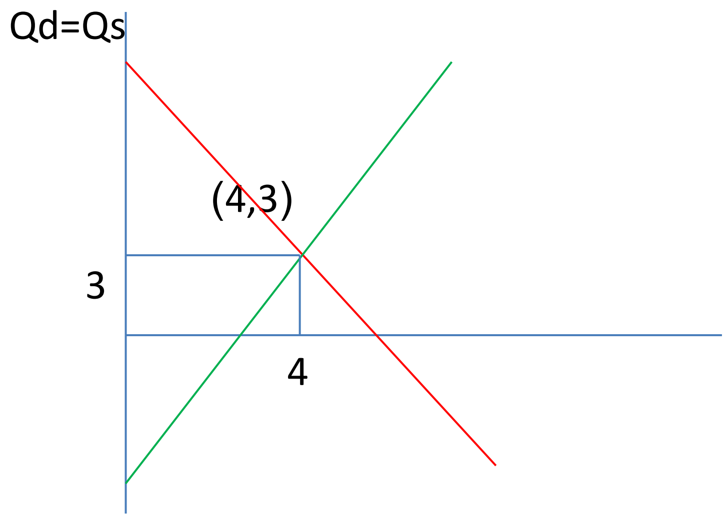
Qs = -5 + 3p........3

10 -2p = -5+ 3p

15 = 5p

بالتعويض 4 في 2 $P = \frac{15}{5}$ $P = 3$

$Q = 10 - 2(3)$ $Q = 4$



المحاضرة الثانية ///

ضريبة الانتاج وأثرها في توازن السوق

(Production tax and its impact on the market)

عندما تفرض ضريبة على سعر كل وحدة من وحدات الانتاج فأن سعر التوازن سوف يرتفع ولكن بمقدار اقل من مقدار الضريبة على الوحدة ، وعند فرض الضريبة تبقى دالة الطلب دون تغيير $(Qd = a - bp)$ أما دالة العرض تتغير لان السعر الذي سيحصل علية المنتج يكون اقل من سعر السوق بمقدار الضريبة وهذا يؤدي الى تقليل الكمية المعروضة فأذا افترضنا مقدار الضريبة هو (T) فأن دالة العرض تصبح $(\mathbf{Qs = -c + dp^T})$ حيث ان (P^T) هي سعر المستلم من قبل البائع بعد دفع الضريبة (T) $\longleftarrow$ $(P^T = P - T)$.

فأن نموذج السوق في حالة فرض الضريبة يكون من اربع معادلات وتحتوي على اربعة متغيرات داخلية (Qd , Qs , P^T , P)

$P^T = P - T$................1

$Qs = - c + dP^T$..........2

$Qd = a - bp$............3

$Qd = Qs$.................4

وعند حل النموذج في حالة فرض الضريبة بالتعويض اذا عوضنا معادلة (1) في معادلة (2) نستطيع حذف المتغير (P^T) نحصل على مايلي :

$Qs = - c + dP^T$

= -c + d(P – t)

= -c + dp – dt ....(5

وبتعويض معادلة (3) و(5) في معادلة (4) نحصل على ....؟

Qd = Qs

a – bp = -c + dp – dt ....(6

وبترتيب المعادلة

A + c + dt = dp + bp

a + c + dt = p (d + b)

وبقسمة طرفي المعادلة على (d + b) نحصل على (ṗ) التوازنية

$$\dot{p} = \frac{a+c+dt}{d+b} \quad .... \ (7$$

والايجاد الكمية التوازنية نعوض معادلة (7) في معادلة رقم (3)

$$\bar{Q} = a - bp = a - \frac{b\,(a+c+dt)}{d+b}$$

$$\frac{a\,(d+b\,) - b\,(\,a+c+dt\,)}{d+b}$$

$$= \frac{ad+\cancel{ab}-\cancel{ab}-bc-bd\,t}{d+b}$$

$$\bar{Q} = \frac{ad-bc-bdt}{d+b} \qquad ....(8$$

Ex// found equilibrium price and equilibrium quantity after imposition of tax (t = 5)....?

Qd = Qs

Qd = 120 – 2p

Qs = 20 + 3p^{T}

The solution......

Qs = 20 + 3 (P – 5)

20 + 3p – 15 = 5 + 3p

Qd = Qs = Q̄

120 – 2p = 5 + 3p

120 – 5 = 2p + 3p

115 = 5p

$P = \frac{115}{5} = \quad 23$

$\bar{Q}$= 120 - 2 (23) = 74

ṗ,$\bar{Q}$ after tax imposed (23,74)

Ex// found equilibrium price and equilibrium quantity after imposition of tax (t = 2)….?

Qd = Qs

Qd = 20 – 7p

Qs = -4 + 5p

The solution……

Qs = -4 + 5(p – T)

= -4 +5 (p - 2)

= - 4 + 5p – 10

= - 14 + 5p

20 – 7p = -14 + 5p

20 + 14 = 5p + 7p

34 = 12p

ṗ= 34/12= 17/6= 2(5/6)

وبتعويض ṗ في Qd نحصل على

$\bar{Q}$= Qd

$\bar{Q}$= 20 – 7 (17/6)= 1/6

ṗ , $\bar{Q}$ = (17/6 , 1/6)

نلاحظ ان اثر الضريبة في زيادة السعر من ṗ= 2 الى ṗ= 2(5/6) أي ان السعر ارتفع بمقدار (5/6) وهذا المقدار من الزيادة هو اقل من مقدار الضريبة وهو (2)

محاضره الثالثة ///

ثانياً : نماذج تحديد الدخل Income determination model

في نماذج تحديد الدخل يعبر بشكل عام عن مستوى توازن الدخل بأربعة قطاعات اقتصادية وعلى النحو التالي :

$$Y = C + I + G + (E – M)$$

حيث ان :

Y : الدخل(income) ، C:الاستهلاك(consumption) ، I: الاستثمار (investment) ،الانفاق الحكومي G:(government expending) ، الصادرات E: (exports) ،الاستيراد M (import).

ولتبسيط النموذج نفرض انه لا يوجد هناك انفاق حكومي وان الاقتصاد مغلق (أي لا توجد فيه تجارة خارجيه) فإذا افترضنا ان الدخل على النحو التالي :

$$Y= C + I \text{ ....1}$$

$$C = a + BY\text{.......2}$$

$$I = I_o\text{...............3}$$

فان معادلة توازن الدخل ستكون :

نعوض معادلة (2 . 3) في معادلة (1) فتصبح

$$Y = C + I$$

$$Y = a + By + I_0$$

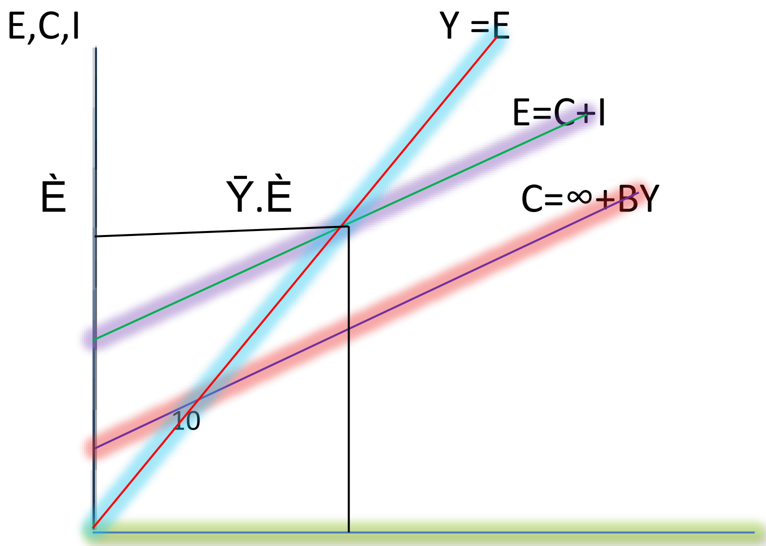
$$Y – By = a + I_o$$

$$(1- B) Y = a + I_o$$

$$\bar{Y}= \frac{a + Io}{1 - B} \text{ .... 4}$$

توازن الدخل

(توازن الدخل القومي)



∞+I

Ex// If you know that::

$Y = C + I$ 1

$C = a + BY$.......2

$I = I_o$..............3

$I_o = 55$, $B = 0.9$, $a = 85$

Found income equilibrium compensation level

A/ The original equation

B/ Short form

A//

$Y = a + By + I_o$

$= 85 + 0.9Y + 55$

$Y - 0.9Y = 140$

$0.1Y = 140$

$Y = 1400$

B//

$$\bar{Y} = \frac{a + Io}{1 - B}$$

$$= \frac{85+55}{1-0.9}$$

$= 140/0.1 = 1400$

عند توسيع نموذج تحديد الدخل بإدخال الضرائب . واعتبار ان الاستهلاك دالة للدخل القابل للتصرف به (disposable income) فيصبح النموذج كالاتي :

$Y = C + I$

$C = a + By_d$

$I = I_o$

$Y_d = Y - T$

$T = 50$, $I_o = 40$, $B = 0.6$, $a = 100$ ان الطريقة المختصرة سيكون على النحو التالي

$Y = C + I$

$= a + By_d + I_o$

$= a + B (Y – T)+ I_o$

$= a + BY – BT +I_o$

$Y – BY = a + I_o – BT$

$$\bar{Y} = \frac{a + Io - BT}{1 - B}$$

اما القيمة العددية لدخل التوازن فيمكن ايجادها على النحو التالي :

$Y = 100 + 0.6Y_d + 40$

$= 140 + 0.6(Y- T)$

$= 140 + 0.6(Y – 50)$

$= 140+ 0.6Y – 30$

$Y – 0.6Y = 110$

$0.4Y = 110$

$\bar{Y} = 275$

Ex// If you know that::

$Y = C + I + G$

$C = C_o + bY$

$I = I_o$

$G = G_o$

Found income equilibrium $G_o=30$, $I_o=75$, $b=0.8$, $C_o=135$

The solution

$Y = C + I + G$

$= C_o + bY +I_o + G_o$

$Y – bY = C_o + I_o + G_o$

$(1 – b) Y = C_o + I_o + G_o$

$$Y = \frac{Co + Io + Go}{(1 - b)}$$

$$= \frac{135+75+30}{1-0.8}$$

$$= \frac{240}{0.2}$$

$=1200$

$= 132 + 0.8Y + 75 + 30$

$Y – 0.8Y = 240$

$0.2Y = 240$

$Y = 1200$

وعند توسيع نموذج تحديد الدخل بأدخال الانفاق الحكومي والتجارة الخارجية فأن النموذج سيكون

$Y = C + I + G + (x – z)$

$C = C_o + bY$

$Z = Z_0 +_z y$

$X=80$,$G=65$, $I=90$, $_z = 0.15$, $b=0.9$, $Z_0 = 40$, $C_0 = 70$

The solution

$Y = C + I + G + (x – z)$

$= C_o + bY + I + G + X - Z_0 +_z y$

$Y – bY + _z y = C_0 + I + G + x + -Z_0$

$(1-b+z)Y = C_0 + I + G + X – Z$

$$\bar{Y} = \frac{C0 + I + G + X - Z}{(1-b+z)}$$

$$Y = \frac{70+90+65+80-40}{1-0.9+0.15}$$

$Y= 265 / 0.25 = 1060$

Ex// If you know that::

$Y = C + I + G$

$C = 0.9 (Y – T)$

$T = 10 + 0.2Y$

$I = 55$ T , C , y Find all of

$G = 38$

ثالثاً : نموذج السوق غير الخطي (non- linear market models)

ان توازن السوق يمكن التعبير عنه ايضاً بصيغة غير خطية على النحو التالي :

الطريقة الاولى // طريقة الحذف

$Qd = Qs$

$Qd= 9 – p^2$

$Qs= -3 + 4p$

نقوم بحذف المتغيرات Qd , Qs

$9 – p2 = -3 + 4p$

$P^2 + 4p – 12 = 0$

$(p - 2) (p + 6) = 0$

أما p=2 او p= - 6 نعوض في معادلة الطلب

$Qs= -3 + 4(2) = 5$

$(\dot{p} , \bar{Q}) = (2 , 5)$

او بطريقة الدستور

$$X = \frac{- b\pm \sqrt{b2-4\ a\ C}}{2a}$$

$$X = \frac{-4\pm \sqrt{16-48}}{2}$$

$$= \frac{-4\pm 8}{2}$$

$= - 6,2$

$(\dot{p} ,\bar{Q}) = (2, 5)$

Ex//If you learned in the market following non-linear model Find equilibrium for each of the price and quantity

$Qd = Qs$

$Qd = 7 – 3p^2$

$Qs = -2 + 6p$

الفصل الثالث

المحاضرة الرابعة

المصفوفات والنماذج الخطية
Matrices and Linear Models

اولاً : المصفوفات
ثانياً : المحددات
ثالثاً : بعض التطبيقات الاقتصادية حول المصفوفات

اولاً : المصفوفات

تعتبر المصفوفات من الادوات الرياضية التي تستخدم في حل المعادلات الخطية ، والمصفوفات هي مجموعة من الاعداد مرتبة على شكل مستطيل ومحصورة بين قوسين ، ويمثل كل منها عنصراً من عناصر المصفوفة .

فالأعداد الواقعة على الخط الافقي تسمى الصفوف (rows) بينمة تسمى الاعداد الواقعة على الخط العمودي باسم الاعمدة (columns) وان عدد الصفوف (m) وعدد الاعمدة (n) يحدد درجة او رتبة المصفوفة وان رقم الصنف تتقدم دائماً على رقم العمود .

$$A = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a1n \\ a21 & a22 & a2n \\ am1 & am2 & amn \end{vmatrix}$$

أما المصفوفة المربعة (a square matrix) يكون عدد الصفوف مساوياً لعدد الاعمدة أي (m = n) وهناك حالة خاصة تتألف فيها المصفوفة من صف واحد ، او عمود واحد ومثل هذه المصفوفة تكون ابعادها (1 x n) او (m x 1) وتدعى هذه المصفوفة بالمصفوفة (متجهه) vector فاذا كان المتجه عموديا سميت بالمصفوفة ذات المتجه العمود column vector اما اذا كان المتجه افقيا سميت المصفوفة ذات المتجه الصف row vector وعند تحويل الصفوف الى اعمدة والاعمدة الى صفوف والتكن (A) يطلق عليها مصطلح مبدله المصفوفة Transpose ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \end{vmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (المتجهة)

$A = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ (المربعة)

$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \longrightarrow \bar{A} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ (المبدلة)

$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow$ (المصفوفة الصفرية كل عناصرها تكون اصفار)

$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow$ (مصفوفة الوحدة كل عناصرها القطرية يساوي واحد)

$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \longrightarrow$ (المصفوفة القطرية تكون جميع عناصرها التي لا تقع على القطر الرئيسي اصفاراً)

جبر المصفوفة (Matrix algebra)

هو تعبير عن مختصر عن منظومة او مجموعة المعادلات الخطية , وتستخدم الطريقة التي يتم بواسطتها حل المشاكل الاقتصادية باعتماد المصفوفة كما في المعادلات الخطية التالية :

$3X_1 + 2X_2 = 32$

$4X_1 - 6X_2 = 45$

والتعبير عنها باستخدام المصفوفة يكون على النحو التالي :

$AX = D$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 32 \\ 45 \end{bmatrix}$

جمع وطرح المصفوفات (Add and subtract matrices)

ان جمع وطرح المصفوفة (A + B) او (A - B) يتطلب ان تكون متساويتين في ابعادها .

مثال // جد حاصل جمع المصفوفتين A , B ذات الابعاد (2 x 3)

$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & -3 \end{vmatrix}$

الجواب

$$A + B = \begin{matrix} 3+2 & 2+1 & 4-2 \\ 5-3 & 6-5 & 0-3 \end{matrix} = \begin{matrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{matrix}$$

وبنفس الطريقة اذا طرحت المصفوفة (B) من المصفوفة (A) تصبح ؟

$$A - B = \begin{vmatrix} 3-2 & 2-1 & 4+2 \\ 5+3 & 6+5 & 0+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 8 & 11 & 3 \end{vmatrix}$$

ضرب المصفوفات (Multiplication of Matrices)

عند ضرب المصفوفة (A) في المصفوفة (B) نحصل على المصفوفة (AB) والاجراء عملية الضرب يجب ان يكون عدد العناصر في كل صف في المصفوفة (A) يساوي عدد العناصر في كل عمود في المصفوفة (B) أي يجب ان تكون المصفوفتان متوافقتين بحيث يكون عدد اعمدة Aمساوياً لعدد صفوف (B)

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Find AB

$$AB = \begin{vmatrix} 6(-1)+4(5) & 6(2)+4(3) \\ 3(-1)+(-2)(5) & 3(2)+(-2)(3) \\ 1(-1)+0(5) & 1(2)+0(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 24 \\ -13 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Example 2

If we have a total of the following equations

$X_1 + \qquad X_3 = 6$

$X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 1$

$3X_2 + X_3 = -1$

Find the desired matrix (X)

The solution

AX = D

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad X = \begin{matrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{matrix} \qquad D = \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}$$

ثانياً : المحددات (Determinants)

ما دامت المصفوفات تتكون من منظومة من المعدلات وان هذه المعادلات لابد من ان تحل فأن هناك طرقاً متعددة لحل هذه المعادلات منها طريقة الحذف والتعويض ، وذلك بحذف احد المتغيرين لاستخراج المتغير الاخر ثم تعويض قيمة هذا المتغير في احدى المعادلتين لاستخراج قيمة المتغير الذي حذف .فلو كانت لدينا المعادلتان الخطيتان هما :

$4X + 6X = 16$ 1

$2X + y = 2$ 2

لإيجاد قيمة X ,Y نضرب المعادلة (2) في (2) ثم نطرح المعادلة الثانية من المعادلة الاولى

$$\cancel{4X} + 6Y = 16$$
$$\underline{\overset{-}{+}\cancel{4X} \overset{-}{+} 2Y = \overset{-}{+} 4}$$ بالطرح

$4Y = 12 \longleftarrow$ $\boxed{Y = 3}$

ثم نعوض قيمة Y في معادلة الثانية نحصل على قيمة X

$$2X + 3 = 2$$
$$2X = -1$$
$$\boxed{X = -\frac{1}{2}}$$

ويمكن حل المعادلة اعلاه بطريقة المحددات باستخدام المحدد من المرتبة الثانية ويرمز للمحدد بالرمز التالي IAI

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

المحدد = حاصل ضرب العنصرين في القطر الرئيسي _ حاصل ضرب العنصرين في القطر الاخر $4 \times 1 - 2 \times 6 = -8$

ويمكن حل المعادلتين اعلاه بطريقة المحددات كما يلي :

$$X_1 = \frac{|\quad A|}{|\quad A|}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} \quad , \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{16\ x\ 1-2\ x\ 6}{4\ x\ 1-2\ x\ 6} = \frac{16 - 12}{4 - 12}$$

$$= \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4\ x\ 1 - 2\ x\ 16}{4\ x\ 1 - 2\ x\ 6} = \frac{8 - 32}{4 - 12} = \frac{-24}{-8} = 3$$

أما في حالة حل ثلاثة معادلات ذوات ثلاثة مجاهيل باستعمال المحددات وصيغته العامة هي :

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ b21 & b22 & b23 \\ c31 & c32 & c33 \end{vmatrix}$$

لإيجاد قيمة هذا المحدد تتم بالطريقة التالية :

1- نأخذ العنصر الاول من الصف الاول a11 ثم نشطب ذهنياً الصف والعمود للذين يقع عند تقاطعهما ثم نضرب a11 بمحدد العناصر الباقية ،

2- نأخذ العنصر الثاني من الصف الاول a12 ثم نشطب ذهنياً الصف والعمود اللذين يقع عند تقاطعهما ثم ضرب a12 ب (- 1) مضروباً بمحدد العناصر الباقية .

3- نأخذ العنصر الثالث من الصف الاول a13 بمحدد العناصر الباقية لذا فأن محدد المصفوفة اعلاه نحصل علية بجمع الحدود المستخرجة في كل من 1 ، 2 ، 3 :

$$|A| = a11\begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} + \quad A12(-1)\begin{vmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{vmatrix}$$

$$+ \, a13\begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$$

= a11 (a22 a33 – a32 a23) – a12 (a21 a33 – a31 a23) + a13 (a21 a32 – a31 a22)

=معامل عددي

Example ///

$$A = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 8\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad +3(-1)\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

= 8 (4 (3) - 1 (7)) - 3 (6(3) - 5(7)) + 2(6(1) - 5(4)) = 8(5) – (-17)+ 2(-14)

=63 وبما ان قيمة المحدد $\neq$ صفر فأن المصفوفة ليست منفردة

المحاضرة الخامســـــــــة

ثالثاً : معكوس المصفوفة (The inverse matrix)

ويرمز لها بالرمز (A^{-1}) ولإيجاد معكوس المصفوفة يجب اتباع الخطوات التالية :

1- التأكد ان تكون المصفوفة مربعه

2- توجد قيمه للمحدد |A| ويجب ان تكون قيمتها لا تساوي صفر

3- ايجاد المصفوفة المرافقة (adjoint matrix) ويرمز لها بالرمز (adj A) وبعده تغيير صفوفها الى اعمدة والاعمدة الى صفوف وهو ما يطلق عليها مبدلة المصفوفة ثم نجد مقلوب المصفوفة .

4- نقسم كل عنصر من عناصر المصفوفة المرافقة على المحدد |A| ويمكن توضيح النقاط حسب المثال التالي :

Find inverted matrix next

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1) نجد المحدد $|A| \neq 0$

$$|A| = 3(0 - 2) - 2(0 - 8) + 1(1 - 0)$$

$$|A| = 3(-2) - 2(-8) + 1(1) \quad = \quad 11$$

2) نجد المصفوفة المرافقة

$$\begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

ثم نغير الصفوف الى اعمدة والاعمدة الى صفوف لمصفوفة المرافقات لنحصل على مبدلة المصفوفة (adj A) على النحو التالي :

$$\text{Adj } A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 8 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

- نجد مقلوب المصفوفة حسب القانون التالي

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad [adj \ \ A]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 8 & -4 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.09 & 0.36 \\ 0.73 & -0.36 & -0.45 \\ 0.09 & 0.45 & -0.18 \end{bmatrix}$$

Example///Find linear equations using the inverse matrix:

$4X1 \ + X2 \ - 5X3 = 8$

$-2X_1 + 3X_2 + X_3 = 12$

$3X_1 - X_2 + 4X_3 = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad , X \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{bmatrix} \qquad ,D= \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$|A| = 98$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

=

$$A^{-1} = 1/98 \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 104/98 & +12/98 & +80/98 \\ 88/98 & 372/98 & 30/98 \\ -56/98 & 84/98 & 70/98 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 196/98 \\ 490/98 \\ 99/98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X1 =2 , X2 = 5 , X3 = 1

طريقة كريمر (Gramers rule)

لحل منظومه المعادلات المذكورة حسب قاعدة كريمر نتبع الخطوات التالية

1- التعبير عن المعادلات بشكل مصفوفة .

2- ايجاد محدد المصفوفة A

3- من اجل استخراج قيمة X1 نستبدل العمود الاول المتمثل بمعاملات المتغير X1 بعمود الثوابت B وتتكون مصفوفة جديدة هي المصفوفة A1 .

4- ثم نجد محدد المصفوفة A1 ثم نطبق قاعدة كريمر لنحصل على قيم X1

5- ثم نجد قيمة X2 باتباع نفس خطوات استخراج X1

6X1 + 5X2 = 49

3X1 + 4X2 =23

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ \\ X2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 32 \end{bmatrix}$$

|A| = 6(4) - 3(5) = -

A1 = $\begin{bmatrix} 49 & 5 \\ 32 & 4 \end{bmatrix}$ = |A1|= 49(4) – 32(5)= 36

X1 = $\frac{|A1|}{|A|}$ = 36/9 = **4**

$A2 = \begin{bmatrix} 6 & 49 \\ 3 & 32 \end{bmatrix} = |A2| = 6(32) - 3(49) = 45$

$X2 = \frac{|A2|}{|A|}$ = 45/9 = **5**

X1= 4 ,X2= 5

eX// Solving the following set of linear equation by using gramer 's rule .

$2X_1 + 4X_2 + X_3 = -11$

$-X_1 + 3X_2 - 2X_3 = -16$

$2X_1 - 3X_2 + 5X_3 = 21$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ = 2(15 -6)-4(-5+4)+(3-6)=19

$|A1| = \begin{vmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -16 & 3 & -2 \\ 21 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ = -11(15-6)-4(-80+42)+1(48-63)= 38

$|A2| = \begin{vmatrix} 2 & -11 & 1 \\ -1 & -16 & -2 \\ 2 & 21 & 5 \end{vmatrix}$ =2(-80+42) +11(-5+4)+1(-21+32)=-76

$|A3| = \begin{vmatrix} 2 & 31 & -11 \\ -1 & 3 & -16 \\ 2 & -3 & 21 \end{vmatrix}$ = 2(63-48)-4(-21+32)-11(3-6)=19

$X1 = \frac{|A1|}{|A|}$ = 38/19=2

$X2 = \frac{|A2|}{|A|}$ = -76/19 = -4

$$X3 = \frac{|A3|}{|A|} = 19 / 19 = 1$$

X1 = 2 , X2 = -4 , X3= 1

رابعاً : بعض التطبيقات الاقتصادية حول استخراج المصفوفات في حل النماذج الاقتصادية .

1- استخدام المصفوفات في نموذج توازن السوق الجزئي .

في نموذج السوق الاتي اوجد السعر التوازني والكميات التوازنية

Qd = **Qs**

Qd = 27 - 4p

Qs = -3 + 2p

Qd - Qs = 0

Qd + 4p =27

Qs - 2p = -3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Qd \\ Qs \\ p \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 27 \\ -3 \end{bmatrix}$$

AX = D

$$|A| = 1 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

|A| = - 4 + (-2) + 0 = - 6

$$= \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Qd \\ Qs \\ P \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 27 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$Qd= \frac{|Qd|}{|A|} = \frac{-4\ (0)+(-2)(27)+(-4)(-3)}{-6} =7$$

$$Qs= \frac{|Qs|}{|A|} \quad \frac{2(0)+(-2)(27)+(-4)(-3)}{6} =7$$

$$P = \frac{|P|}{|A|} \quad = \quad \frac{1(0)+(-1)(27)+(1)(-3)}{-6}=5$$

Qd = Qs=7

P= 5

2-نموذج التوازن الكلي لاقتصاد بعلاقات مع الخارج

يمكن التعبير عن النموذج الكلي او نموذج الدخل القومي بالصيغة الرياضية: Y = C + I + E - M

النموذج التالي مكون من ثلاثة قطاعات اوجد ($\bar{Y}$. $\bar{C}$, $\bar{T}$)

Y = C + I + G

C = 135 + 0.8Y

$I = I_o = 75$

$G = G_o= 30$

T = 30 + 0.2Y

Y = C +75 +30

Y – C = 105

-0.8Y + C = 135

-0.2Y + T =30

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.8 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 105 \\ 135 \\ 30 \end{bmatrix}$$

|A| = 1(1-0) +1(-0.8) = 0.2

$$\bar{Y} = \frac{|A1|}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 105 & -1 & 0 \\ 135 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{0.2} = 240/0.2 = 1200$$

$$C^{-} \frac{|A2|}{|A|} \frac{\begin{bmatrix} 1 & 105 & 0 \\ -0.8 & 135 & 0 \\ -0.2 & 30 & 1 \end{bmatrix}}{0.2} = 219/0.2 = 1095$$

$$T^{-} = \frac{|A3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 105 \\ -0.8 & 1 & 135 \\ -0.2 & 0 & 30 \end{vmatrix}}{0.2} = \frac{54}{0.2} = 270$$

التحليل الرياضي لجدول المستخدم - المنتج

يفترض النموذج ان الطلب الكلي (الناتج الكلي) X_i على منتج القطاع (i) يتكون من مجموع الطلب الوسيط على المنتج من بقية القطاعات الاقتصادية الاخرى (J) مضافاً الية الطلب النهائي على المنتج (d) . نفترض بان $ai_1 , ai_2 , ai_3 , ai_4 .... ai_n$ كمية من ناتج القطاع (i) التي تدخل في انتاج جميع القطاعات الاخرى ويمكن توضيح العلاقات المذكورة بالجدول التالي :-

جدول المستخدم – المنتج موضحاً فيه الطلب الوسيط النهائي والناتج الكلي

OUT PUT	INTERMEDIATE DEMAND الطلب الوسيط			FINAL DEMAND الطلب النهائي		TOTAL OUT PUT الناتج الكلي
IN PUT	I	II	III	.... N	D	X
I	A_{11}	A_{12}	A_{13}	.... a_{1n}	d1	X1

II	a21	a22	A_{23}	.... a_{2n}	d2	X2
III	a31	a32	A_{33}	.... a_{3n}	d3	X3

يتضح من الجدول بان الناتج الكلي للقطاع يتوزع بين الوسيط للقطاعات الاقتصادية الاخرى والقطاع نفسة وكذلك الطلب النهائي وكما مبين في النموذج الرياضي التالي :

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} aij + di$$

حيث ان

X : الناتج الكلي

Aij : مستلزمات انتاج القطاع (j) من القطاع (i)

Di : الطلب النهائي

مثال //افترض وجود اقتصاد بسيط مكون من قطاعين ، التشابك القطاعي بينهما موضح في جدول المستخدم – المنتج التالي :

out put	الطلب الوسيط		الطلب النهائي	الناتج الكلي
IN PUT	**A**	**B**	**D**	**X**
A	15.50	3.25	20	38.75
B	7.75	9.75	15	32.50
عوامل انتاج اخرى				
C	15.50	19.50	-	35.00
اجمالي استخدامات	38.75	32.50	35.00	106.25

المطلوب 1- الناتج الكلي للقطاعين A,B اذا ازداد الطلب النهائي في القطاعين المذكورين الى 30 او 25 دينار على التوالي

2- صمم جدول مستخدم – منتج في ضوء النتائج الجديدة ؟

الحل // لحل جدول المستخدم - المنتج نستخدم قانون معكوس مصفوفة اليونتيف The Leontief matrix

$$(X = (I - A)^{-1} D)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{15.50}{38.75} & \frac{3.25}{32.50} \\ \frac{7.75}{38.75} & \frac{9.75}{32.50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

X = (I - A)$^{-1}$ D

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$|I - A| = (0.42) - (0.02) = 0.40$

$$(I - A)^{-1} = \frac{adj\ (I-A)}{|I-A|}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.40} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 & 0.25 \\ 0.50 & 1.50 \end{bmatrix}$$

X = (I - A)$^{-1}$ D

$$X = \begin{bmatrix} 1.75 & 0.25 \\ 0.50 & 1.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38.75 \\ 32.50 \end{bmatrix}$$

مثال //

اوجد الطلب الكلي (X) لاقتصاد يتكون من ثلاثة قطاعات اقتصادية . اذا علمت ان مصفوفة المعاملات الفنية (A) والطلب النهائي (D) كما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 & -0.1 \\ 0.5 & 0.8 & -0.6 \\ -0.1 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$|I - A| = 0.151$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{00.151} = \begin{bmatrix} 0.54 & 0.39 & 0.32 \\ 0.51 & 0.62 & 0.47 \\ 0.23 & 0.25 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X = (I - A)^{-1} D}$$

$$X = \frac{1}{00.151} = \begin{bmatrix} 0.54 & 0.39 & 0.32 \\ 0.51 & 0.62 & 0.47 \\ 0.23 & 0.25 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175.5 \\ 203.5 \\ 109.9 \end{bmatrix}$$

الفصل الرابع

السكون المقارن وفكرة المشتقة

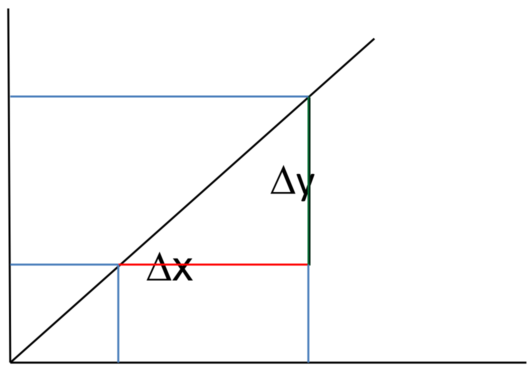
Comparative Statics and the Concept of Derivative

أ- معدل التغير والمشتقة

معدل التغير : هو النسبة بين التغير في المتغير التابع Y والمتغير في المتغير المستقل (X)

$Y = f(X)$ 　　　　 معدل التغير = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

ان معدل التغير في الدالة الخطية يكون ثابتاً ومساوياً للميل



$Y = a + bX$

$Y + \Delta y = a + b(X + \Delta x)$

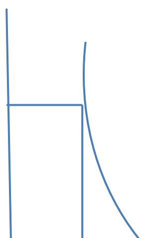
$Y + \Delta y = a + bx + b\Delta x$

$\Delta Y = a + bX + b\Delta X - Y$

$\Delta Y = b\Delta X$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = b$

لكن على العكس من ذلك نجد ان معدل التغير للدالة ذات الخط المنحني يختلف من نقطه الى اخرى على طول المنحني



فيختلف ميل المماس من نقطة الى اخرى وكقاعدة عامة كلما كان ميل المماس

اكثر انحدار كانت القيمة المطلقة لميل المنحني اكثر عند تلك النقطة . Δy

كما ان معدل التغير يمكن ان يقاس بميل المماس للنقطة المراد استخراج

ميل المنحني فيها فميل المماس للزاوية يساوي المقابل مقسوماً Δx

على المجاور للزاوية .

المشتقة Derivative: - تقيس معدل التغير الفوري للدالة وهذا يعني كيف يتغير التابع عند تغير المستقل بمقدار صغير جداً ويمكن التعبير عن المشتقة بالصيغة التالية

$$\frac{dy}{dx} = \text{limit } \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

قواعد التفاضل :

التفاضل هو طريقة لتحديد مشتقة الدالة ويعني ايجاد التغير في Y لتغير X عندما يكون التغير في (ΔX) مقترباً من الصفر وهو لا يعني اكثر من تطبيق بعض الصيغ والقواعد

1- قاعدة القاعدة الثابتة تساوي صفر Y=a $\quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 0$

2- قاعدة الدالة الخطية $q = 2 - 3p$ $\quad \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dp}} = -$

3- قاعدة الدالة الاسية $Y = 5X^3$ $\quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 15X2$

4- قاعدة الجمع او الفرق $Y = 9X^2 + 2X - 3$ $\quad \frac{dy}{dx} = 18X + 2$

4- قاعدة الضرب : الاولى في مشتقة الثانية + الثانية في مشتقة الاولى

$$Y = 3X^4 (2X - 5)$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 3X4\ (2) + (2X - 5)12X3$$

$$6X^4 + 24X^4 - 60X^3 = 30X^4 - 60X^3$$

5- قاعدة القسمة : المقام في مشتقة البسط ناقصا البسط في مشتقة المقام على مربع المقام

$$Y=\frac{5X3}{4X+3} = \frac{(4X+3)(15X2)-5X3(4)}{(4X+3)2} = \frac{40X3+45X2}{(4X+3)2}$$

التطبيقات الاقتصادية للمشتقات

1- مشتقات دوال الطلب والعرض

يمكن التعبير عن استجابة الكمية المطلوبة للتغيير في السعر بواسطة المشتقة الاولى لدالة الطلب

$Qd = 9 - P^2$ $\quad\quad \frac{dQ}{dP} - 2P \quad\quad$ F¯=-2(4)=-8

المرونة : Elasticity هي التغير النسبي في الكمية المطلوبة على التغير النسبي في السعر

$$E = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

مثال / اذا كان دالة الطلب $Q = 60 - 3P - 0.8P^2$ المطلوب احسب مرونة الطلب السعرية عندما $P = 5$ ؟

$$\frac{dQ}{dP} - 3 - 1.6P \quad\quad = -3 - 1.6(5) = -11$$

$Q = 60 - 3(5) - 0.8(5)^2 = 25$ $\quad\quad E = -11\left(\frac{5}{25}\right) = -2.2$

مثال / اذا كانت دالة الطلب $Qd = 650 - 5P - P^2$ واذا افترضنا ان $P= 10$ فان مرونة الطلب السعرية يمكن حسابها على النحو التالي :

$$Ed = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$\frac{dQ}{dP} = -5 - 2P \quad\quad = -5 - 2(10) = -25$$

$Q= 650 - 5(10) - (10)^2 = 500$

$E = -25\left(\frac{40}{500}\right) = -0.5$