محاضرات الاحتمالات المتقدمه

المرحله الثانيه

إعداد

أ.م.د.عمار كوتي

م.منتهى عبد الرزاق

مجموعه *تعاربف*

*التجربه العشوائه:*

هي التجربه التي تكون نتائجها غير معلومه بشكل دقيق

 *المتغير العشوائي*: : random variable

هو مصطلح يستخدم في الرياضيات التصادفية. المتغير العشوائي يرمز إلى دالة رياضية و التي تظهر نتائج تجربة عشوائية معينة. و المتغير العشوائي هو متغير يمكن له أن يأخذ أي قيمة عشوائية غير محددة سلفا بالتالي يمكن اعتباره النتيجة العددية لإجراء تجربة غير حتمية النتيجة. فعملية دحرجة النرد للحصول على رقم من ضمن المجموعة

 }1,2,3,4,5,6{

هي عملية توليد لمتغير عشوائي هو ناتج عملية الدحرجة.

وهناك نوعان من المتغير العشوائي :

) Discrete Random variable) المتغير العشوائي المتقطع او المنفصل (1

وهو المتغير الذي يأخذ قيم صحيحة سواء كانت سالبة أو موجبة أي يمكن كتابة المتغير العشوائي بصورة متقطعة أو منفصلة أي يأخذ أعداد محددة أو معدودة مثل عدد طلاب , عدد حوادث الطرق .

) continuous Random variable) المتغير العشوائي المستمر (2

 X متغير عشوائي متصل إذا أخذ أي قيمة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها، كالوزن والزمن المستغرق , يقال إن المتغير العشوائي متصل إذا كان يأخذ

قيماً تنتمي إلى مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد، بمعنى أن المتغير يأخذ جميع

القيم التي تقع في نطاق تغيُّره،:

دالة كتلة الأحتمالية :-

Probability mass function (P.m.f)

تحقق الشروط التالية :-

1. 0p(x) 1

 P(x=xi ) if x = x1,x2,…xn

 P(x)=

 0 other wise

Ex:- 1- show tat p(x) is (p.m.f)

P(x)= x/21 x=1,2,3,4,5,6

1. other wise

2\_ find p(x=3) , p(x>3) , p(x),

3\_ draw figure of p(x)

 1\_sol:

+ p(x=6)

1/21+2/21+3/21+4/21+5/21+6/21

=1

Is e.mf

2\_ p(x=3) = 3/21

P(x>3) = p(x=4) + p(x=5) +p(x=6)

 = 4/21 + 5/21 + 6/21 = 15/21

P(x= p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) +p(x=6)

 = 3/21 + 4/21 + 5/21 + 6/21 = 18/21

P(x=3.5) = 0

P(x = 7) = 0

P(x=0) = 0

3) p(x)

1

6/21

5/21

4/21

3/21

2/21

1/21

 1 2 3 4 5 6

EX:-

P(x) = 2k x=0

 K x=1

 3k x=2

 0 other wise

1\_ find k

2k + k + 3k = 1

6 k= 1 k=1 /6

 P(x) = 2/6 = 1/3 ;x =0

 1/6 ; x =1

 3/6 = ½ , x =2

1. other wise

find1-p(1.5) , p(x0) ,p(x0) ,p(x=2)

solution:

1-p(x=1.5) =0

2=p(x0) =p(x=1)+p(x=2)= 1/6 +3/6 =4/6=2/3

1. p(x0) =p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=2/6+1/6+3/6=6/6=1
2. p(x=2)=2/3

2- Continuance random variable:

The random variable belongs to the interval &satisfies

2-0

 Ex: show that f(x) is p.d.f

 F(x) = 2/x3 1

Find p(x ),p(x1),p(x) p(1),p(1)

S0l.

1- dx=1

F(x) is p.d.f

2-p(x)=1

D**efiniton:**

أذا كان x متغير عشوائي يمتلك دالة أحتمالية فأذا كان f(g(x)) دالة حقيقية فأن التوقع الرياضي للدالة g(x) يرمز له E(g(x) معطى لل صيغة الأتية :

 E(g(x)) =

 =

**Propertie of expectation :-**

**-E ( c ) =c**

**-E(cx)=cE(x)**

**-E (xy )= E(x)E(y) iff x , y are independ**

 **Var(x)= E(x2)-(E(x))2**

**E(x)=mean**

**E(x2)=2p(x)**

 **=2dx**

Ex: let x be random variable with the probability function

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 3 |
| P(x) | 1/4 | 1/4 | 1/4 |

**-pr0ve that p(x) is p.m.f**

**-draw figure**

**-find p(x=1), p(x1) p(x1)**

**-find E(x) ,E(x+4),E(2x-8)**

**- find variance of x**

Sol:

- **=1**

1/4+1/4+1/2 =1

P(x) is p.m.f

-p(x=1)=1/4

-p(x)=1/4 + ½ =3/4

-p(x1) = ¼ +1/4 +1/2 =1

-E(x)=p(x)

 = 1.1/4 + 2. ¼ +3. ½ =9/4

- E(x+4) = E(x)+4=9/4 +4 =25 /4

**Ex:**let we have f(x)=1/3 1

-show that f(x) is p.d.f

-find p(x),p(x1),p(x3)

-find E(x), E(x+9)

-find variance

Sol:=dx =1

 Is p.d.f

P(x4)= 0

P(x)=1

 P(x3)= =1/3

 ***Moment generating function:الداله المولده للعزوم***

***Mgf =M***tx = E(etx) =tx p(x) if x is discreat r.v

 =tx f(x) if x is continuous r.v

Mx- =M1 =Ex

Mx- =M2 = Ex2 when time t=0

 Ex :

F(x) = ¼ if x=0

 =1/2 if x=1

 =1/4 if x=2

 Find M.g.f

-find mean ,vairince by M.g.f

 Sol :

Mxt= E (etx) = tx p(x)

 =1/4 e0t + ½ et +1/4 e2t

E(x)=M- =1/2 et +1/4 e2t =1 when t=0

E x2 = M-- =1/2 et +2/2 e2t =1

 Ex :

P(x) = ¼ 1

Find mean and var.

 E(x) = =3

E(x2) =2 ¼ dx = 31/3

Var (x) =Ex2 -(Ex)

 =31/3 -32 =4/3

 Mt =E etx =tx p(x) dx =tx ¼ dx

***Chapter 2***

***Joint probability function***

Let x,y be random var. then f(x,y) is j.p.f if

0 f(x,y) 1

 = 1 If (x , y) are discrete random variables

If (x,y) are continues then

\_ 0 f(x,y)

Ex : let f(x,y)= (x+y)/15 x=1,2 y=0,1,2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x/y | 0 | 1 | 2 | P(x) |
| 1 | 1/15 | 2/15 | 3/15 | 6/15 |
| 2 | 2/15 | 3/15 | 4/15 | 9/15 |
| P(y) | 3/15 | 5/15 | 7/15 | 1 |

Find p(x=2,y=1) =3/15

P(x

4/15 +3/15 =7/15

P(x=-2,y=2) =0

Marginal of x

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 |  1 | x |
| 9/15 | 6/15 | P(x) |

Marginal of y

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 0 | y |
| 7/15 | 5/15 | 3/15 | P(y) |

**Ex** =

Ey= =0+1/15 +2.7/15 =19/15

Exy=0.1.1/15+1.1.2/15+1.2.3/15 + 2.0.2/15 +2.1.3/15+2.2.4/15

 =30/15

C0r(x,y)=Exy-ExEy=30/15-24/15.19/15

***Correlation coefficient:***

If Px,y o.5 strong

If Px,y 0.5 weak

If Px,y=0 no realation

***Condition function and condition propertie***

 Let x,y b e r.v then P( x/y) = (p(x∩y)/p(y)

 =(f(x,y))/ f(y) ;f(y)≠0

Ex:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x\y | 0 | 2 | P(x) |
| 0 | 1/4 | 1/4 | 2/4 |
| 1 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| 2 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| P(y) | 1/4 | 3/4 | 1 |

1-show that Px,y is J.p.m

1. Find p(x),p(y)
2. Find E(x),Ey)
3. Find Px,y
4. Find p(x/y=2)
5. Find p(y/x=1)

Sol:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x/y | 0 | 2 | P(x) |
| 0 | 1/4 | 1/4 | 2/4 |
| 1 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| 2 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| P(y) | 1/4 | 3/4 | 1 |

Marginal of x

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X  | 0 | 1 | 2 |
| P(x) | 2/4 | 1/4 | 1/4 |

 E(x)= 0.2/4 +1.1/4 +2.1/4=3/4

E(x2)=5/4

Marginal of y

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 0 | y |
|  | 3/4 | 1/4 | P(y) |

E(y) = 0. 1/4 +2 . ¾ = 3/2

E(y2) = 3

Var(x) = 11/16

Var (y) = ¾

Cov(x,y) = Exy - ExEy = 3/8

Px,y =

P(x/y =2)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 |
| P(x/y=2) |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 0 | x |
| 1/3 | 1/3 | 1/3 | P(x/y=2) |

**EX:-**  given the J.p.d.f of x and y

If f(x,y) = 6x2y 0 < x < 1

 0 < y < 1

 0 other wise

1 ) find marginal of x and marginal of y

2 ) find cov (x,y)

3) find p (x/y) , p(y/x) , p(y/x=1/4 )

Sol:

 P(x)=

 =3x2

Marginal x is p(y)=

 =2y

***Chapter 3***

 ان للمتغيرات العشوائيه لها تطبيفات كثيره ومن هذه التطبيفات (تجارب ذي الحدين ،برنولي، بانوميل)

لكل تجربه عدد من المحاولات نفرضه n

-ان المحاولات مستقله عن بضها

-لكل محاوله نتيجتين نجاح وفشل

ملاحظه :

عندما عدد المحاولات =1 تسمى برنولي وعندما عدد المحاولات n>1 تسمى بانوميل

***Bernoulli distribution :***

**P+q =1**

**P = E(x) ,var(x) =pq ,Mxt=q+p et**

**P =النجاح**

 **q =الفشل**

**P(x) =p**xq(1-x) x=0,1

 =0 o.w

Ex: x-B(1,1/3)

Find mean ,var(x) ,Mxt

P(x) =(1/3)x.(2/3)1-x x=0,1

Mean =p=1/3

Var =pq =1/3 . 2/3 =2/9

Mxt =2/3 +1/3 et

***Binomial distribution:***

**P(x) = n!/x!(n-x)! pxqn-x**

**E(x) np**

**Var(x) =npq**

**m.g.f =(q+pet)n**

Ex: x- B (20, ½)

P= ½ , q=1-p =1/2

E(x) =np =20 .1/2 =10

Var(x)npq = 20 .1/2 .1/2 =5

P(x=2) =20!/2! .18! .(1/2)2 .(1/2)18

Ex:

P(x) =1/4 0<x<10

 =0 o.w

E(x) =