المحاضرة الثالثة

د. شذى الدغفق

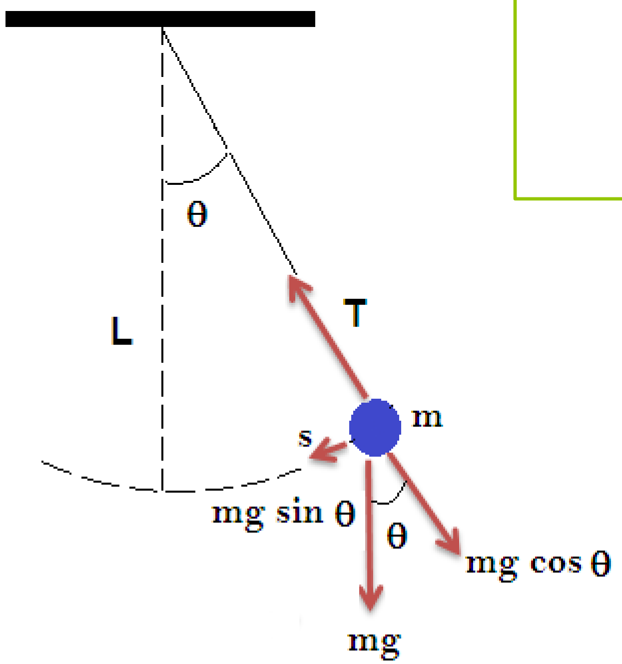
البندول
The Pendulum

البندول البسيط

- يتركب من خيط عديم الوزن مثبت من أحد طرفيه ومعلق في طرفه الآخر كتلة صغيرة على شكل كرة.

يتأثر البندول بقوتين:

1. قوة الشد T.
2. ثقل الكرة mg (وزنها لأسفل).



$$T = mg\cos\theta$$

$$F = -mg\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{x}{L}$$

$$\because F = ma$$

$$\therefore ma = -mg\frac{x}{L}$$

$$a = -g\frac{x}{L}$$

د. شذى الدغفق

$$a = -\omega^2 x$$

حيث أن: $\omega^2 = \frac{g}{L}$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

ونجد أن: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ التردد الزاوي لحركة البندول البسيط

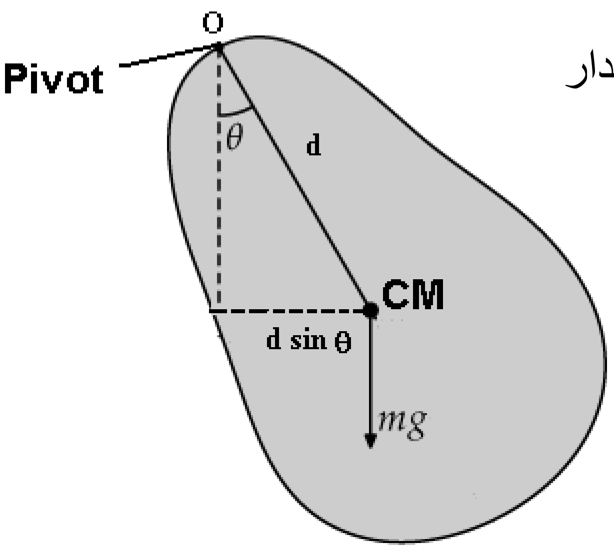
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$ الزمن الدوري لحركة البندول البسيط

أي أن الزمن الدوري والتردد للبندول البسيط يعتمد فقط على طول الخيط وتسارع الجاذبية ولا يعتمد على الكتلة.

البندول الفيزيائي Physical Pendulum

- إذا كان جسم معلق يتذبذب حول محور لا يمر بمركز كتلته والجسم لايمكن تقريبه ليعتبر مجرد ثقل صغير فلا يمكننا معاملة هذا النظام كبندول بسيط. في هذه الحالة تسمى هذه المنظومة بندول فيزيائي.

نفترض جسماً جامداً معلق من نقطة O على مسافة d من مركز الكتلة كما في الشكل :



قوة الجاذبية تمده بعزم دوران حول محور يمر بالنقطة O ومقدار

عزم الدوران الناتج هو mgd sin θ حيث θ كما في الشكل.

وباستخدام قانون الحركة $\sum \tau = I\alpha$ حيث I هو عزم القصور

الذاتي حول المحور المار بالنقطة O نجد أن:

$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

والإشارة السالبة تبين أن عزم الدوران حول O يعمل على إنقاص θ أي أن قوة الجاذبية تعمل كعزم دوران إرجاع. وبما أن هذه المعادلة تعطينا عجلة زاوية $d^2\theta / dt^2$ للجسم المعلق, يمكننا اعتبار أنها معادلة حركة لهذا النظام فإذا فرضنا أن الزاوية θ صغيرة يمكن تقريب $\sin \theta \approx \theta$ ومعادلة الحركة تختزل كما يلي:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta$$

وحيث أن هذه المعادلة شبيهة بمعادلة $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

إذن الحركة توافقية بسيطة. أي أن حل المعادلة هو:

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \emptyset)$$

حيث θ_{max} هي الحد الأقصى للإزاحة الزاوية

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

والزمن الدوري للبندول الفيزيائي

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

الاهتزازات المخمدة Damped Oscillations

- في الكثير من الأنظمة الحقيقية تكون القوى غير محافظة مثل قوة الاحتكاك حيث أنها تؤخر الحركة وبالتالي فإن الطاقة الميكانيكية للنظام سوف تقل مع الزمن في هذه الحالة تسمى الحركة مخمدة **Damped.**
- وقوى التأخير تكون عند تناسب القوة مع سرعة الجسم المتحرك وتعمل باتجاه معاكس لاتجاه الحركة.
- تلاحظ هذه القوى عندما يتحرك الجسم خلال الهواء وتكتب بالشكل التالي: $\bar{R} = -b\bar{v}$

حيث b معامل الاضمحلال أو الإخماد.

R قوة الإعاقة retarding force

ملاحظة:

إذا وجد سائل يكون الاحتكاك قوي, أما إذا كان لا يوجد سائل فقط هواء فإن الاحتكاك يكون بسيط و أقل

$$\bar{R} = -b\bar{v}$$

$$\sum F = ma$$

$$-kx - bv = ma$$

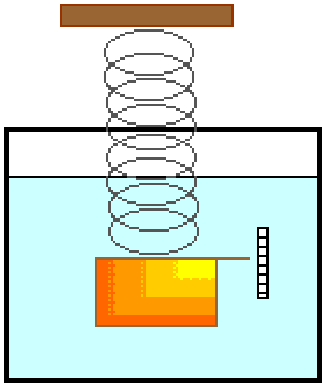
$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

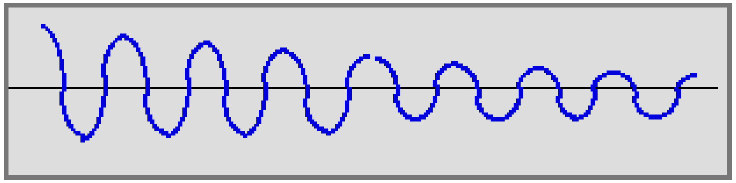
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \emptyset)$$

احتكاك صغيرة أي عندما تكون b صغيرة فإن حل هذه المعادلة





$\ddot{x}$: المشتقة الثانية , x: المشتقة الاولى

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

تتناقص السعة أسياً مع الزمن حتى تصل إلى الصفر عند زمن مالا نهاية

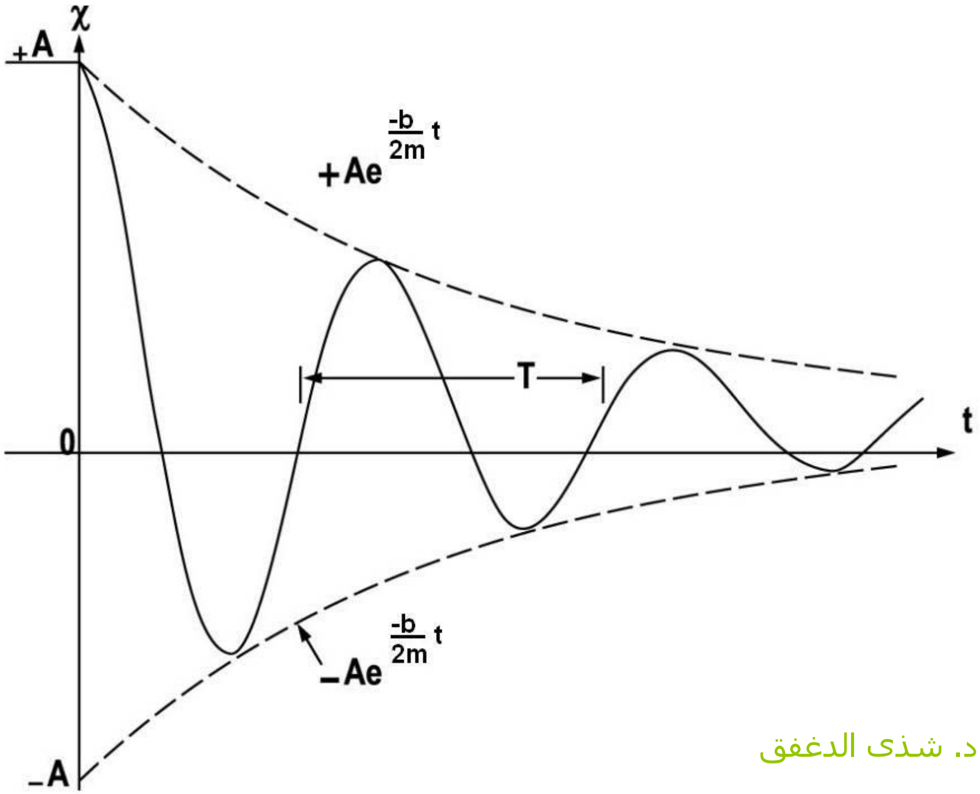
$$\omega = \sqrt{{\omega_o}^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

حيث أن $\omega_o = \sqrt{k/m}$ التردد الزاوي في غياب أي قوى إخماد (المتذبذب الغيرمضمحل)

ويسمى <u>التردد الطبيعي</u>

بزيادة b فإن سعة المهتز تقل أكثر فأكثر وبسرعة (علاقة عكسية)

السعة هي $Ae^{-\frac{b}{2m}t}$



• نعرف زمن العمر أو متوسط العمر τ بأنه $\tau = \frac{m}{b}$

وهو الفترة الزمنية اللازمة لانخفاض السعة 1/e من قيمتها

مثال:

استنتجي أبعاد معامل الإخماد b ؟

$$R = -bv$$

$$bv = force(\text{قوة})$$

$$b = \frac{\text{قوة}}{v \ \text{سرعة}}$$

$$F = ma \qquad \rightarrow = m\frac{\text{طول}}{(\text{زمن})^2}$$

$$\therefore b = \frac{[M][L][T]}{[T]^2[L]} = \frac{[M]}{[T]}$$

$$b = kg/sec$$

نظرية الأبعاد: [T] زمن, [M] كتلة, [L] طول.

الاهتزازات القسرية Forced oscillations

- عند أي لحظة يمكن أن تنتقل طاقة إلى النظام المهتز بواسطة تأثير قوة تعمل في اتجاه حركة المهتز مثل طفل على أرجوحة.
- تبقى سعة الحركة ثابتة مادامت الطاقة الداخلة لكل دورة مساوي الخسارة في الطاقة الميكانيكية لكل دورة والناتجة عن قوى المقاومة (الاحتكاك).
- لنفرض أننا أثرنا على النظام بقوة خارجية F بتردد زاوي ω تعطى بالعلاقة:

$$\{F = F_o \cos \omega t\}$$

حيث أن "F" مقدار ثابت

$$ma = -kx - bv + F_o \cos \omega t$$

وبالتالي يمكن كتابة معادلة الحركة الاهتزازية الكلية على الصورة:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_o \cos \omega t$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_o \cos \omega t$$

حل هذه المعادلة:

$$x = A\cos(\omega t + \emptyset)$$

حيث تكون سعة الاهتزازة في هذه الحالة:

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (\frac{b\omega}{m})^2}}$$

❖ يتضح أنه عند التأثيرعلى النظام بقوة خارجية قد أجبرها على الاهتزاز بتردد غير ترددها.

مثال:

كتلة مقدارها 2kg مربوطة بزنبرك, أعطيت قوة خارجية مقدارها $F=(3N)\cos(2\pi t)$ إذا كان ثابت القوة للزنبرك 20 N/m أوجدي:

أ- زمن الاهتزازة.

ب- سعة الحركة بفرض عدم وجود إخماد للحركة.

أ) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1sec$

ب) $\therefore b = 0 \rightarrow$ لعدم وجود إخماد

$$A = \frac{F_o}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_o^2) + 0}}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{2}} = \sqrt{10} = 3.16\, rad/sec$$

$$A = \frac{3}{2}\left((4\pi^2) - (3.16)^2\right)^{-1} = 0.509m = 5.09cm$$

ملاحظة هامة:

إذا اقتربت ω من ω_o تكبر السعة.

إذا تساوت ω وَ ω_o يحدث الرنين.

$$b \approx o \quad \rightarrow \quad A = \frac{F_o/m}{(\omega^2 - \omega_o^2)}$$

الرنين:

$$x = A\cos(\omega t + \emptyset)$$

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (\frac{b\omega}{m})^2}}$$

العلاقات توضح أن (المهتز القسري يتذبذب بتردد القوة المحركة).

لاخماد صغير $b \approx 0$

إذا اقتربت ω من ω_o فإن المقام يقل وبالتالي تزداد السعة