**محاضرات هندسة**

أعداد : د.عبدالخضر غالي و م. منتهى عبد الرزاق

**أمثله عن أنظمة بديهية :**

يتكون المستوي الأسقاطي من مجموعه π لكلمات أولية تقنية تدعى نقاط (pointe)

ومجموعات جزئية من π تدعى خطوط (lines) وهي غير معرفة أيضاً . سنرمز للنقاط بالحروف الكبيرة A,B,C… وللخطوط باحرف الصغيرة I,m,n… .

**مجموعة البديهيات :**

**A1** أي نقطتين مختلفتين في π يحتويهما خط واحد فقط .

أي أن , أذا كان A,B بحيث أن A ≠B و A,B فان l=m

**A2** كل خط يحتوي على ثلاث نقاط على الأقل .

**A3** أذا كان l خطاً في π فأنه توجد على الأقل نقطة واحدة A بحيث أن A

**A4** أي خطان يشتركان في نقطة واحدة في الأقل .

**A5** يوجد في الاقل خط واحد في π .

**ملاحظات :**

1. واحد فقط تكافئ في الاقل وفي اأكثر واحد ولبرهان وجود واحد فقط يجب أن نبرهن على وجود واحد في الأقل ثم نبرهن على وجود واحد في الأكثر .
2. العبارة الخط هو مجموعة نقاط لا تعتبر تعريفاً للخط لأن الدائرة هي مجموعة نقاط وكذلك المثلث وغيرهما من الأشكال
3. النقطة P عنصر في المستوي π ((p في خين ان الخط l مجموعة جزئية من المستوي

π ) .

1. العبارة p تعني أن النقطة l يمر بالنقطة p عنصرا لأكثر من خط مثل l,m , نقول أن l يلتقي مع m في p , أو أنهما يتقاطعان في p .

من هذه البديهيات نستطيع أن نكون مبرهنات :

**مبرهنة 1 :** أي خطين في المستوي الاسقاطي يشتركان في نقطة واحدة فقط .

**البرهان :**- ليكن .

من **A4**  توجد نقطة A بحيث أن .

نستنتج من **A1** أن وبهذا يناقض فرضية وبهذا l و m يشتركان في نقطة واحدة فقط . وبهذا يتم البرهان .

ملاحظة:

من المبرهنة 1 كل خطين مختلفين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط , لذا لا يمكننا الحديث عن التوازي في المستوي الأسقاطي .

**مبرهنة 2 :-** كل نقطة في المستوي الاسقاطي يمر بها ثلاث خطوط .

البرهان :

لتكن .

من **A3** يوجد خط l

اولا : أذا كانت p

من A2 الخط l يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل , لتكن A1,A2,A3 .

من **A2**  توجد الخطوط PA1, PA2, PA3 التي تمر النقطة P وهي مختلفة .

ثانيا : أذا كانت فأنه ومن A2 الخط l يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل , واتكن A1,A2,P. ومن A3 توجد نقطة B بحيث أن من A1 يوجد الخطوط m=BA1 , k=BP

الخط m=BA1 *يحتوي على نقطة أخرى في الأقل , وتكن D من A1 مرة أخرى يوجد الخط*

*i=DP و بهذا يكون لدينا 3 خطوط هي* i=DP , k=BP و l .

ويهذا يتم البرهان .

***تمارين :***

1. *توجد في الأقل ثلاث خطوط مختلفة في المستوي الأسقاطي .*
2. *ليست كل الخطوط تمر من نقطة واحدة .*

مستويات اسقاطية منته

*هي مجموعه منتهيه تحقق البديهيات السابقه*

***مبرهنة 3:***

*هذا وجد خط في مستوي اسقاطي منته يحتوي بالضبط على* n  *من النقاط فان المستوي يحتوي بالضبط n2-n+1* من النقاط *.*

البرهان:

ليكن L ,L  *p*1,p2,…,pn

من *A3* يوجد خط l بحيث ان l  *p*

من *A1 توجد n من الخطوط هي* p1,pp2,….,ppn *p*

ومن *A2* *توجد نقطة ثالثه على كل خط من الخطوط المذكورة ولتكن*

Q1,Q2,Q3….Qn  على التوالي ,

النقطه q1نصلها بالنقاط P1,P2,…,PN لنحصل على n من الخطوط

P1Q 1,p2Q1,…,pnQ1 هذه الخطوط تقطع pp2 في n من النقاط المختلفه لذللك

Pp2 يحتوي على n-1 من النقاط اضافه الى النقطه p . وبنفس الطريقه كل الخطوط الاخرى تحوي عاى n-1 من النقاط اضافه الى النقطه p .

لذ لك اصبح n من الخطوط كل منها بحتوي n-1 من النفاط اضافة الى النقطة p

n(n-1)+1=n2-n+1 من النقاط على الاقل

ولكي نبرهن على الاكثر نفرض توجد نقطة اضافيه ولتكن Q والخط pQ يختلف عن الخطوط المشار اليه ومن مبرهنه 1 يجب ان يقطع الخط l في النقطه 1+pn  ,

وبذلك يكون الخط l يحتوي n+1 من النقاط وهذا يخالف الفرض

اذا المستوي يحتوي بالضبط n2-n+1 من النقاط

؛P

***نتيجه:***اذا وجدخط في مستوي اسقاطي منته يحتوي بالضبط على n من النقاط فان اي خط اخر يحتوي بالضبط n

***المستوي التالفي (***Affine plane)

يتكون المستوي من مجموعة من النقاط ومجموعة جزئيه تدعى الخطوط وسنرمز للنقاط باحرف كبيرة وللخطوط باحرف صغيرة

**مجموعه البديهيات:**

A1 اي نقطتين مختلفتين في يختويهما خط واحد .

A2 كل خط يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل .

A3 أذا كان l خط في فأنه توجد نقطة A وتحدة في الأقل بحيث أن A

A5 أذا كان l خط و A نقطة بحيث ان A فأنه يوجد خط واحد فقط m يحتوي A بحيث أن : -

A5 يوجد في الأقل خط واحد .

**تعريف :-** يقال لخطين مختلفين l , m أنهما متوازيان أذا كان

**من** التعريف يمكن صياغة A4 *كالاتي:*

**اذا كان**  *l خط و* A نقطه *بحيث ان l* A *فانه يوجد خط واحد فقط m*  يمر*من*

*A*  ويوازي l

**مبرهنه 4:**

*اي خطين في المستوي التالفي يشتركان في نقطه واحدة على الاكثر*

*البرهان:*

*نفرض العبارة ليست صحيحة اي يوجد خطان مختلفان l,m*

*وهذايعني وجود نقطتين يحتويهما خط واحد والذي يناقض A1*

مبرهنه 5:

اذا قطع خط *احد خطين متوازيين في المستوي التالفي فانه يقطع الاخر*

البرهان:

*ليكن M= l نفرض أن العباره الأخيرة خاطئة أي أن .*

*من النقطة P يمر خطان هما m و k يوازيان الخط l وهذا يناقض A*4

*وبهذا يتم البرهان .*

***مبرهنة 6 :-*** *الخطان الموازيان لخط واحد متوازيان في المستوي التألفي .*

***البرهان :****-*

*ليكن وليكن يجب أن نبرهن أن*

*نفرض أن العبارة الأخيرة خاطئة ,*

*حسب مبرهنة 5 وهذا يناقض الفرض .*

*أذاً الخطان الموازيان لخط واحد متوازيين في المستوي التألفي .*

*وبهذا يتم البرهان .*

***مستويات تألفية منهية***

*هي مجموعات منهية تحقق البديهيات الاربعة للمستوي التالفي .*

***مبرهنة7 :-*** *أذا وجد حط l في مستوي نألفي منته يحتوي بالضبط n من النقاط فأن أي خط أخر يوازي l يحتوي بالضبط على n من النقاط .*

***البرهان :****-*

*ليكن l خط وليكن* P1,P2,P3…,Pn*وليكن m خط أخر يوازي l .*

*يجب ان نبرهن أن m يحتوي بالضبط على n من النقاط*

*من A2* توجد النقطة Q1 على m ومن A1 يوجد خط P1Q2 *.*

*من A4 توجد n-1 من الخطوط الموازيه الى P1Q1 تمر بالنقاط P1,P2,P3…, Pn*

*وهذه الخطوط حسب مبرهنة 6 تكون متوازية . و أستناد الى مبرهنتين 4و5 تقطع هذه الخط m في n-1 من النقاط المختلفة , ولتكن Q*1,Q2,Q3…Qn *والتي تختلف عن Q*1

حسب تعريف التوازي .

توجد n من النقاط على الخط m الأقل .

نفرض وجود نقطة أخرى Qn+1  من A4  *يوجد خط k يمر بالنقطة*

Qn+1 *يوازي P*1Q1 *. وأستنادا للمبرهنتين 4 و 5 يقطع هذه الخط k الخط l في نقطة مختلفة عن النقاط ,P2,P3,..P*n *وهذا يخالف الفرض لأن l يحتوي بالضبط على n من النقاط . m يحتوي بالضبط n من النقاط*

*مبرهنة 8 :اذا وجد خط l في مستوي تالفي منتهي يحتوي بالضبط n من النقاط فانه توجد بالضبط n-1 من الخطوط الموازية الى l*

*البرهان :-*

*ليكن l خط وليكن P1 ,P2 , P3,….Pn  ولتكن p نقطة (A3) P*

*من A1 يوجد خطين هما PP1,PPK حيث أن PPK هي اي نقطة من النقاط P1,P2,P3…,PN*

*من A4  توجد بالضبط n-1 من الحطوط الموازية الى pp1 والتي تمر بالنقاط p2,p3,..pn*

*وبالتأكيد فأن أحدهم يمر بالنقطة pk*

*من المبرهنة 4 مبرهنة5 الخط pp1 في نقاط مختلفة عددها مع النقطة pk يساوي n من النقاط ولتكن Q1=P,Q2 ,….,Qn =pk,….Qn .*

*من A4*  ومبرهنة 5 توجد بالضبط على N-1 من الخطوط الموازية الى l والتي تمر بالنقاط

Q1=P,Q2,…,Qk =pk , …QN

من A4 يوجد خط m يوازي PP1 يمر بالنقطة R . ومن مبرهنة 4 مبرهنة 5 الخط m يقطع الخط l في النقطة Pn+1 التي تختلف عن النقاط P1,P2,P3,..,Pn وهذا يناقض الفرض .

وبهذا يتم البرهان

***نظاما يونج وفانو (the systems of young and fano)***

***نظام يونج :***

*هو نظام يتكون من البديهيات المستوي التألفي الخمسة أضافة الى البديهية التالية :*

A6أذا كان l خط في فانه توجد ثلاث نقاط في الأكثر على l .

أن A3 مع A6 تجعل النظام منته وكل خط يحتوي على ثلاث نقاط فقط .

***مبرهنة 10 :-****يحتوي نظام يونج على تسع نقاط فقط .*

***مبرهنة 11 :***- يحتوي نظام يونج على أثني عشر حطا فقط .

***مبرهنة 12:***- أي نقطة في نظام يونج يمر بها أربعة خطوط فقط .

نظام فانو :-

هو نظام يتكون من بديهيات المستوي الأسقاطي الخمسة أضافة الى البديهية التالية :

A6 أذا كان lخط في π فأنه توجد ثلاث نقاط في الأكثر على l .

أن A3مع A6 تجعل النظام منته وكل خط يحتوي على ثلاث نقاط فقط .

**مبرهنة13:-** يحتوي نظام فانو على سبع نقاط فقط .

**مبرهنة 14:**- يحتوي نظام فانو على سبع خطوط فقط .

**مبرهنة 15:**- أس نقطة في نظام فانو يمر بها ثلاث خطوط .

**تمارين:-**

ت1) في المستوبي التالفي أذا وجد خط واحد يحتوي على n النقاط ز برهن :-

1. كل نقطة يمر بها بالضبط n+1 من الخطوط .
2. يحتوي النظام بالضبط على n2 من النقاط .
3. يحتوي النظام بالضبط على n(n+1) من الخطوط .

ت2) في المستوي التألفي كل خطين مختلفين لهما نقطة واحدة مشتركة على الأكثر .

ت3) في المستوي الاسقاطي أذا وجد خط واحد يحتوي على n نقاط . برهن

1. لكل نقطة يوجد n من الخطوط تمر منها .
2. يحتوي كل خط بالضبط على n نقاط .
3. يحتوي النظام بالضبط على n2 – n +1 من الخطوط .

***الهندسة الأقلدية: ( edclidean geometry )***

هي 10 فرضيان 5 منها مفاهيم *و 5 منها بديهيات .*

***المفاهيم العامة:*** *(common notation)*

1. *الأشياء المساوية لشئ واحد متساوية .*
2. أذا أضيفت كميات متساوية لأخرى متساوية فالنتائج تكون متساوية .
3. أذا طرحت كميات متساوية من أخرى متساوية فالنتائج تكون متساوية .
4. الأشياء المتطابقة متساوية فيما بينها .
5. الكل أكبر من الجزء .

**البديهيات :-**

P1 من الممكن رسم مستقيم من أي نقطة الى نقطة أخرى .

P2 يمكن مد قطعة مستقيم من جهتيها الى غير حد .

P3 يمكن رسم دائرة أذا علم مركزها ونصف قطرها .

P4 جميع الزوايا القوائم متساوية .

P5 أذا قطع مستقيمان بمثلث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة منقائمينتين فأن المستقيمين , اذا مدا بغير حد و يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع التي يكون فيها مجمزع الزاويتين أقل من قائمتين .

برهن أقليدس 28 دون ان يستخدم P5  مما اثار انتباه العلماء بعده اذ اعتقد الكثسر منهم ان P5 يجب ان تكون مبرهنة وتحتاج الى برهان . ومن هذه النقطة بدأت دراسة الهندسة اللا اقليدية.

**بعض مواضع الضعف في نظام أقليدس**

1. خلو النظام البديهي لأقليدس من الكلمات الأولية , حيث ان لاقليدس يعرف النقطة بواسطة البعد و الطول والعرض ,ما هو البعد و الطول والعرض ؟ أن أقليدس يعرف الكلمات بواسطة كلمات أخرى قد تكون اصعب من الكلمة وربما هذه الكلمات تحتاج الى تعاريف اخرى , وهكذا و حيث تكون سلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة الاولى , لذلك فانه في الانظمة الحديثة قد أستخدمت كلمات اولية وبدلالتها تعرف بقيمة الكلمات في النظام ز
2. لقد أسنخدم أقليدس بديهيات لم يشير اليها في نظامه لذلك سميت بديهيات ضمنية او فرضية ضمنية وهي :-

1-فرضية الأستمرارية

*2\_ بديهية باخ*

*3\_ بديهيات البينية*

*4\_ وحدانية المستقيم*

*5 \_ لا نهائية المستقيم*

*6 \_ بديهيات الترتيب الخطية*

1. *يستعمل ارخميدس كلمة يساوي , بينما في الانظمة الحديثة يعني تطابق فمثلا عندما يقال زاويتان متساويتان تقول بانهما متطابقتان .*
2. *اعتمد على الرسم لبرهان مبرهناته وليس مجرد توضيح للبرهان .*
3. *ان بديهيات اقليدس ليست كاملة . حيث يكون واضحا لو اخذنا مجموعة بديهيات هلبرت سنبين اننا نستطيع اضافة بديهييات جديدة الى مجموعة اقليدس . طريقة اخرى لبيان ان مجموعة بديهيات اقليدس لبيان ان مجموعة بديهيات اقليدس غير كاملة , وكذلك من العبالاة التالية : الخط الذي يصل بين نقطة داخل دائرة ونقطة خارجها يقطع الدائرة ز هذه العبارة لا يمكن برهنتها او دحضها ز والسبب الالساسي هو عدم اعطاء بديهية الاستمرارية .*

***مبرهنه 1:كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم ومنته في الطول***

*لتكن AB قطعه مستقيم وحسب بديهيه 3 توجد دائرة مركزها A ونصف قطرها AB*

*ولتكن c نقطه تقاطع الدائرتين وحسب بدبهيه 1 توجد القطعتان AC,BC وحسب تعريف الدائره AC=AB وAB=BC اذن AB=BC=AC*

*اذن ABC مثلث متساوي الاضلاع*

***الخلل في البرهان:***

*1-وجود النقطة c على AB فلا نحصل على مثلث وعدم وجود بديهيه عن تقاطع دائرتين*

*2- لايوجد شى عن وحدانية قطعة مستقيم 3-لم يذكر شى عن ثلاثة نقاط ليست على استقامه واحدة تمثل دائرة*

*C*

***البديهيه الخامسه لاقليدس (بديهيه التوازي)***

*لقد حاول العلماء برهنه هذه البديهيه لفترة تزيد عن الفي سنه ولم يستطيع احد اعطاء البرهان الصحيح لان جميع المحاولات اعتمدت على عبارات مكافئه لهذه البديهيه.*

***بعض مكافئات البديهيه الخامسه:***

*1-بديهيه بليفير :من نقطه لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم موازي واحد فقط للمستقيم المعلوم*

*2- اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتين والزاويه الخارجيه تساوي الزاويه الداخليهالمقابله لها وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين*

*3- مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين*

*4- الزاويه الخارجيه في المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لهما*

*5-يوجد زوج من المثلثات المتشابه*

1. *اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الاخر*
2. *المسافه العموديه بين مستقيمين متوازيين تكون ثابته*
3. *يوجد زوج من المستقيمات التي تكون المسافه بينهما ثابته*
4. *اذا كان مجموع زوايا اي مثلث مقدار ثابت فان هذا المجموع يساوي زاويتين قائمتين*
5. *اذا كانت ثلاث زوايا من شكل رباعي قوائم فالزاويه الرابعه تكون قائمه ايضا*
6. *المستقيمان الموازيان لمستقيم معلوم يكونان متوازيان*

*لا ي ثلاث نقاط لا تقع على مستقيم واحد توجد دائرة تمر من هذه النقاط*

***محاولات لبرهنه البديهيه الخامسه او احد مكافئاتها***

*فيما يلي بعض هذه المحاولات :*

***محاولات بطليموس:***

*لقد برهن بطليموس مبرهنه 29 بدون استخدام البديهيه الخامسه*

***مبرهنه 29:***

*اذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع فان الزاويتين الداخلتين المتبادلتان متساويتان والزاويه الخارجيه تساوي الزاويه الداخليه المقابله لها وكذلك مجموع الزاويتين الداخلتين على جهه واحده من القاطع تساوي قائمتين.*

***البرهان:***

*ليكن AB,CD مستقيمان متوازيان و EF مستقيم ثالث يقطع AB,CD في H,G على التوالي*

*علينا ان نبرهن DHG + BGH =π و BGE =و*

*BGH = CHG*

*نفرض ان*

*AGH+ + CHG π و BGH +DHG ≠ π*

*BGH +AGH DHG + + CHG ≠π*

*ولكن*

*CHG = DHG + CHG =π و AGB + BGH =π*

*زاويتين مستقيميتين )*

*وهذا تناقض*

*BGH + DHG = π*

*وكذلك AGH + CHG =π*

*زاويه مستقيمه*

***الخلل في البرهان:***

*اعتمد بطليموس في برهانه على بديهيه بليفير وهي احدى مكافئات البديهيه الخامسه*

*E*

*G*

*B*

*D H*

*F*

***محاولة عمر الخيام***

*حاول اثبات اذا وجد ثلاث زوايا في شكل رباعي قوائم فالزاويه الرابعة تكون قائمه ايضا*

*وهي مكافئه للبديهيه الخامسه*

*تعريف رباعي الخيام: هو شكل رباعي تكون زاويتا القاعده قوائم ويكون العمودان متساويان*

*وتسمى القاعدة العليا بالسمت*

*D C*

42

*B*

*A*

*في المثلثان ABC و ABD*

*BD = AC وAB مشترك والزاويتان A,B قائمتان لذلك المثلثان متساويان*

*ومن التساوي ينتج AD=BC*

*وفي المثلثين ADC,CBD وفيهما*

*AC=BD و CD مشترك وBC=DA لذلك المثلثان متساويان ومن التساوي ينتج الزاويتان A,C متساويان*

*وبعد ذلك برهن ان (المتقيم الواصل بين منتصفي القاعدة والسمت يكون عموديا عليهما*

*ليكن EF منصف القاعدة والسمت في E وF على التوالي نصلEC ED, ثم نطابق المثلثين*

*ACE,BDE وفيهما*

*AC=BD وان الزاويتين A,B و,AE=BE(بالتنصيف)*

*لذا يتطابق المثلثين ACE,BDE وينتج من التطابق EC=DE*

*ثم نطابق المثلثين CEF,DEF وفيهما EC=ED والضلع EF و DF=CF (بالتنصيف)*

*لذا فان المثلثين متطابقين .ومن التطابق ينتج الزاويتين 3و4 متساويين ولان*

*3 + 4 =π وان 3 = 4 = 90 اي ان EF عمودي على CD*

*ومن التطابق ينتج 6 = 5 وان الزاويتين 1,2 متساويتين فان*

*6 + 2 = 5 + 1 حسب مفهوم 2 اي ان*

*BEF = ُِ AEF وهتان زاويتين مستقيمتين اذن EF عمودي على*

*AB*

*في الشكل الرباعي BEFD D = 4 اي زاوية D قائمة.*

***الخلل في البرهان:***

*اعتمد على ان المسافة العموديه بين المستقيمين المتوازيين ثابته وهي مكافئه للبديهيه الخامسه*

***هندسه هلبرت ( Hilbert )***

*قدم الالماني ديفيد هلبرت نظام بدهيا متكاملا حيث صحح الاخطاء التي رافقت اعمال اقليدس*

***بديهيات الوجود والوقوع :***

*P1 لكل نقطتين مختلفتين يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما*

*P2 كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الاقل*

*P3* لكل مستقيم معلوم توجد في الاقل نقطه واحدة لا تنتمي اليه

***تعريف 1 :****تكون المجموعتين متساويتين اذا وفقط اذا احتوتا بالضبط على نفس العناصر*

***مبرهنه 1 :****توجد في الاقل ثلاث نقاط في المستوي*

*البرهان: حسب البديهيات 2و3و4*

***مبرهنه 2 :****اي مستقيمين مختلفين في المستوي يشتركان في نقطه واحدة على الاكثر*

*البرهان :يترك واجب*

***تمارين :***

***1-****برهن لكل نقطه يوجد في الاقل مستقيمان يمران بها*

*2- يوجد في الاقل مستقيم واحد لا يمر من نقطه معلومه*

***بديهيات الترتيب:***

*رمز:*

*بين ) Between ) هي كلمه اوليه فمثلا العبارة (B تقع بين A,C بالرمز*

*A-B-c*

***البديهيات :***

***P***5  *A-B-c اذاوفقط اذا A C\_-B-*

*P6 اذا كان A-B-c فان النقاط A,B,C نقاط مختلفه وعلى استقامه واحدة*

*P7* اذا كانت A,B,C ثلاث نقاط مختلفه وتقع على مستقيم واحد فان واحدة فقط تتحقق c or A-B-C - C-A-B or B-A

رمز: *الرمز A-B-C-D هو مختصر A-B-C,A-B-D ,A-C-D , B-C-D*

*لاكثر من اربع نقاط*

*P*8 اذا كانت A,B,C,D ا ربع نقاط مختلفه وتقع على مستقيم واحد وان A-B-C

فان واحده فقط تتحقق D-A-B-C , A-D-B-C , A-B-D-C , A-B-C-D

P9 اذا كانت A,B نقطتين فان

1- توجد نقطه C بحيث ان A-B-C

2- توجد نقطه D بحيث ان A-D-B

3- توجد نقطه E بحيث ان E-A-B

**مبرهنه 3 :**

*اذا كان A-C-D A-B-C , فان النقاط A,B,C,D مختلفه وتقع على مستقيم واحد*

*2- اذا كان D , B-C-D- A-B فان النقاط A,B,C,D مختلفه وتقع على مستقيم واحد*

*3- اذا كان A-B-C , B-C-D فان النقاط A,B,C,D مختلفه وتقع على مستقيم واحد*

***البرهان:***

***1-****من بديهيه 6 بما ان A-B-C فان التقاط A,B,C مختلفه وعلى مستقيم واحد وكذلك بما ان A-C-D فان النقاط A,C,D مختلفه وعلى مستقيم واحد*

*فاذا كان B=D فان A-C-B=A-C-D وهذا يناقض A-B-C*

*لذلك فان النقاط A,B,C,D مختلفه وحسب بديهيه 1 يوجد مستقيم واحد فقط بين A,C وبما ان B,D تقعان على AC فان النقاط A,B,C,D*

*وبنفس الطريقه نبرهن 2-و3-*

***مبرهنه 4 :***

1. *اذا كان A-B-C , A-C-D فان A-B-C-D*
2. *اذا كان A-B-D ,B-C-D فان A-B-C-D*
3. *اذا كان A-B-C ,B-C-D فان A-B-C-D*

*البرهان:*

1. *حسب مبرهنه 3 A-B-C ,A-C-D فالنقاط A,B,C,D مختلفه وعلى مستقيم واحد*

*وحسب بديهيه 8و7 تتحقق الحاله A-B-C-D وبنفس ا لطريقه نبرهن 2- و3-*