**جمهورية العراق /وزارة التعليم العالي والبحث العلمي**  **جامعة القادسية /علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات**

 **قسم الرياضيات**

 **المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية**

 **ذات المعاملات المتغيرة**

 **بحث تقدمت به الطالبة**

 **ولاء ناصـــر خضيــر**

 **الى كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات/قسم الرياضيات**

 **وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات**

 **إشراف**

 **الدكتور قصي حاتم الكفاري**

 **1438هـ 2017م**





 **اهدي هذا العمل المتواضع**

 **إلى**

 **الوالدين الكريمين حفظهما الله**

 **والى كل إفراد أسرتي**

 **والى أرواح شهداء العراق الأبرار رحمهم الله وأدخلهم**

 **فسيح جناته والى روح جدي رحمه الله**

 **والى كل الأصدقاء ومن كانوا برفقتي ومصاحبتي إثناء**

**دراستي الجامعية**

 **والى كل من لم يدخر جهدا في مساعدتي**

 **والى كل من ساهم في تلقيني ولو بحرف في حياتي الدراسية**

 **شكر وتقدير**

 **لا يسعنا بعد الانتهاء من إعداد هذا البحث إلا إن أتقدم**

 **بجزيل الشكر وعظيم الامتنان إلى أستاذي الفاضل**

 **الدكتور قصي ألكفاري**

 **الذي تفضل بالإشراف على هذا البحث حيث قدم لي**

 **كل النصح والإرشاد طيلة فترة الإعداد فله مني كل**

 **الشكر والتقدير**

 **الخـــــلاصـــة**

 **تضمن هذا البحث مقدمة عن المعادلات التفاضلية واستخدامها في الحياة) العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى العلوم الاقتصادية والاجتماعية)**

 **كما تضمن المفاهيم الأساسية للمعادلة التفاضلية وأنواعها**

 **واختص هذا البحث بالمعادلات التفاضلية من الرتبة**

**الثانية ذات المعاملات المتغيرة وطرق حلها مع الأمثلة**

 **المحتـــويــــات**

|  |  |
| --- | --- |
|  **الموضــــــــــــــــــــوع** |  **الصفحــــــــــــة** |
|  **المقدمة** |  **1** |
|  **المفاهيم الاساسية** |  **2 – 3**  |
|  **طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية**  **ذات المعاملات المتغيرة** |  **4** |
|  **طريقة تغير البارامترات** |  **4 – 6**  |
|  **طريقة التحويل الى الصورة القياسية** |  **7 - 9** |
|  **طريقة تحليل المؤثر**  |  **9 – 12** |
|  **استخدام صيغة ابل**  |  **12 – 14** |
|  **استبدال المتغير المستقل**  |  **15 -18**  |
|  **المعادلة التامة**  | **19 – 20** |
|  **المعادلة المزاملة**  |  **20 -21** |
|  **نظريات المعادلة المزاملة** |  **22** |
|  **اختزال الرتبة** |  **23 – 25**  |

 **الفصــــل الأول**

 **المقدمـــــة**

**1– المقــــــــــدمــــــــة**

 **ما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم**

 **العلـوم الفيزيائية والهندسيـة والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها**

 **في دراسـة التحليـل الرياضي وامتـدت استخـداماتهـا في العلـوم الاقتصاديـة والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضليـة وتزايدت**

**أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها .**

 **وتتمثل المعادلات التفاضلية بالخطيـة واللاخطيــة والمتجانسـة**

**وغير المتجانسة والتامة ومعادلات التفاضلية الجزئية والمعادلات**

**التفاضلية الاعتيادية وغيرها من المعادلات التفاضلية لكننا سوف**

**نتنــاول في بحثنـــا هذا نــوع من هذه المعـادلات التفاضليـة وهي**

**المعـادلات التفاضليـة من الرتبـة الثانيـة ذات المعامـلات المتغيـرة**

**وطرق حلها مع الأمثلة على طرق حلها.**

 **( 1 )**

 **الفصـــل الثانـــي**

 **المفـاهيــم الاســاسـيـة**

**2 – المفاهيم الأساسية :-**

**1– 2المعادلة التفاضلية :- هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن X ومتغير تابع**

 **وليكن Y(x )واحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية y , y´ ,……..أي أنها على الصورة**

 **العامة ( 1-2 ) F(X , Y ,Y´, Y´´,……. ) = 0 ………**

**2 – 2 رتبة المعادلة :- هي رتبة اعلي معامل تفاضلي في المعادلة .**

**3– 2 درجة المعادلة :- هي درجة ( قوة ) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن**

 **تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية .**

**4 – 2 حل المعادلة التفاضلية : تسمى الدالة Y = Y(x ) حلا للمعادلة التفاضلية**

 **F( X, Y ,Y ´ ,Y´´ ,…….) = 0 أذا كانت :**

**-1قابلة للاشتقاق n مرة .**

**-1تحقق المعادلة التفاضلية أي) = 0 F ( x , Y(x ) ,(x ) ,Y´´(x ) , …….**

**5 -2 الحل العام :- هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية ويحقق المعادلة**

 **التفاضلية.**

**6 – 2 الحل الخاص :- هو الذي يحقق المعادلة التفاضلية ولا يشتمل على أي ثوابت**

 **اختيارية وقد يحصل عليه أحيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية**

 **في الحل العام بقيم محددة.**

 **( 2 )**

**7– 2 المعادلة التفاضلية الخطية :- تكون المعادلة التفاضلية خطية إذا كان المتغير**

 **التابع ومشتقاته في المعادلة التفاضلية من الدرجة**

 **الأولى وصيغتها هي :**

 **………..(2-2)**

**8 – 2 المعادلة التفاضلية المتجانسة :- تسمى المعادلة التفاضلية**

 **M (x ,t ) dx + N (x, y ) dy = 0 ……………… ( 2-3 ) متجانسة اذا كان كل من**

 **N , M دالة متجانسة من نفس الدرجة علما ان F ( X , Y ) دالة متجانسة من درجة**

 **n إذا كان f ( x ,λ y ) = f ( x , y ) ……… (2- 4)**

 **λ R**

 **وتكون المعادلة التفاضلية غير متجانسة إذا كانت المعادلة( 3–(2 لا تساوي صفر .**

**9 – 2 المعادلة التفاضلية التامة :- تسمى المعادلة التفاضلية**

 **( x) y +(x )y + (x ) y = f( x) ……. (2-5) تامة إذا أمكن إيجاد معادلة**

 **تفاضلية من الرتبة الأولى يكون تفاضلها هو المعادلة 5)- (2 وبعبارة أخرى تكون**

 **المعادلة) 5- (2تامة إذا أمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى .**

**10-2 المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة على**

 **صورة العامة**

 **……… (2-6 )**

 **( 3 )**

 **الفصـــل الثالث**

 **طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات**

 **المتغيرة**

**3– طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة**

**3-1طريقة تغير البارامترات ( الوسائط )**

 **إذا علم إن الحلين للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة للمعادلة ( 6 – 2 )هما**

 **( x ) , ( x ) وبالتالي فأن**

 **(1ـ1ـ3) = ( X ) + ( X ) + -----------**

 **حيث (x) , ( x ) حلان مستقلان , ثابتان اختياريان نفترض إن الحل**

 **الخاص على الصورة**

 **= ( X ) + (X ) --------- (3-1 -2)**

 **حيث , دالتان في X ويمكن إيجاد كل منها حيث :**

**r ( x ) dx ( X ) =**

 **( X) =**

 **وذلك بحل المعادلتين**

 **( X ) ( X ) + ( X ) ( X ) =0 ----------- (3- 1- 3 )**

 **( X ) (X ) + ( X ) ( X ) = r ( X ) ------------- (3- 1- 4)**

 **(4 )**

 **مثال 1-3**

**اوجد الحل العام للمعادلة :**

**( 2X + 1 ) ( X + 1 ) Y´´ + 2XY´ – 2Y = ( 2X + 1 ------------- ( 3-1-1)**

**بعد إثبات إن كلا من , Y = X Y = حل خاص للمعادلة المتجانسة6)– 2 )**

**الحل :-**

**تكون المعادلة المتجانسة المناظرة ) 6–2 (على الصورة**

**( 2X + 1 ) ( X + 1 ) Y´´ + 2XY´ – 2Y = 0 -------- (3-1-2)**

1. **نثبت أن Y = X حل المعادلة) (3-1-2 حيث Y´ = 1 , Y´´ = 0**

**أي الطرف الأيمن = 2X – 2X = 0 الطرف الأيسر**

1. **نثبت أن Y = حل المعادلة3-1-2)) حيث**

 **Y´ = , Y´´ =**

**الطرف الأيسر = + 2X - ( 2X + 1 ) ( X + 1 )**

 **= - - = - =0**

**الطرف الأيمن = من أ , ب نجد أن**

 **، حلان مستقلان للمعادلة(3-1-2)**

 **( 5 )**

 **أي أن حل المعادلة المتجانسة هو**

 **= ( X ) + ( X )**

 **حيث , ثابتان اختياريان**

 **نضع المعادلة المعطاة على الصورة العامة :-**

 **Y´´ + Y´ - Y =**

 **حيث - -1 , X بالمقارنة بالمعادلة العامة نجد أن :**

 **r ( x ) =**

**وعلى ذلك فأن حل المعادلة المتجانسة يكون على الصورة**

 **( X ) = X + ( X ) + =**

**حيث , ثابتان**

**نفرض الحل الخاص على الصورة = ( X ) X + ( X )**

 **حيث**

**r( x )dx r(x) dx , ( x ) = (X ) =**

**وبالتالي فأن**

 **W{ = = - = =**

**فيكون**

 **( X )= . dx = = x**

 **( 6 )**

 **( x ) = - dx = -**

 **- =**

**وعلى ذلك يكون الحل الخاص هو**

**=X . X+ [**

**=**

***ويكون الحل العام على الصورة***

**+ Y = X +**

**) *2-3* (*التحويل إلى الصورة القياسية***

 ***إذا كان لدينا المعادلة*) *1-2-3* (Y´´ + P(X) Y´ +q(x) Y= r(x )-------**

 ***تستخدم التعويض* y = uv *حيث* u *دالة اختيارية* v *دالة في* X *وعلى ذلك فأن***

**Y´ = uv´ + u´v , Y ´´= uv´´ + 2u´v´ +u´´v**

 ***بالتعويض في*) *1-2-3* (*نجد إن***

**) *2-2-3* (uv´´ + ( 2u´ +p u )v´ + ( u´´ + p u´ + q u ) v = r ---------**

 **حيث u , v , p , q , r *دوال في* X**

 ***نختار u بحيث تحقق* 2u´ + pu =0**

***وبالتالي فأن* u = exp [**

 **أي u =**

 **( 7 )**

 **ثم بالتعويض عن u , u´ , u´´ في المعادلة 2-2)-3 (تصبح المعادلة على الصورة**

 **V´´ + I ( X ) V = R(X ) -------- (3-2-3)**

**حيث , R (X ) = p - I (X ) = q -**

 **المعادلة (3-2-3) تسمى الصورة القياسية للمعادلة3-2-1)) وهي تكون على صورة معادلة**

 **تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة أو على صورة معادلة أويلر كوشي وبحلها نحصل على**

 **الدالة v ، وبذلك نحصل على الحل العام Y = uv .**

**مثال 2-3**

 **بالتحويل إلى الصورة القياسية ، أوجد الحل العام للمعادلة**

 **0 < X , 4 Y ´´+4XY ´+ ( – 1 ) Y = 0**

 **الحل :-**

 **نضع المعادلة على الصورة**

**) Y = 0 Y ´ + ( Y´´ +**

 **بالمقارنة بالمعادلة Y´´ + P ( X ) Y´ + q (x ) y = r (x )**

**نجد أن p (x ) =**

 **نختار u =**

**نستخدم التعويض v y = للتحويل الى الصورة القياسية فيكون**

 **( 8 )**

 **V V´ + V´ - V´´ - V , Y´´ = V´ - Y´ =**

 **V V´ + V´´ - =**

 **بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن**

 **V - V + V´ - V + V´ + V ´´ -**

 **في V = 0 V ´´ +**

**المعادلة على الصورة القياسية**

 **V = 0 V´´ +**

**فتكون**

 **X X + Sin V = CoS**

**الحل العام للمعادلة يكون :-**

 **X ] X + Sin [ Cos Y =**

**3-3 طريقة تحليل المؤثر**

 **وهي طريقة سهلة اذا كانت قابلة للتطبيق ، وهي طريقة تختزل المعادلة من الرتبة الثانية**

 **الى المعادلة من الرتبة الاولى .**

 **اذا كان لدينا المعادلة**

 **Y´´ + P ( X ) Y´ + q ( X ) Y = r (X ) ---------( 3-3-1)**

 **أو + P (X ) D + q ( X )) Y = r (x ) )
 (9)**

 **وامكن تحليل المؤثر التفاضلي كما يأتي :-**

 **[ + P ( X ) D + q ( X ) ] Y = ( D + ( X ) ) ( D + ( X ) ) Y**

 **تصبح المعادلة على الصورة ( D + ( X ) ) ( D + ( X ) ) Y = r (X )**

 **ثم نفترض أن**

 **( D + (X ) ) Y = Z --------- ( 3-3-2)**

 **وعلى ذلك فأن**

 **( D + (X ) ) Z = r (X )**

 **أو + (X) Z = r (X )**

 **وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى ، وبحلها نحصل على قيمة Z وبالتعويض في**

 **( 3-3- 2 ) عن Z = Z(X ) تصبح) 3-3-2)على صورة**

 **+ ( X) Y = Z(X)**

**وهي ايضا معادلة خطية من الرتبة الاولى في Y وبحلها نحصل على الحل العام Y .**

 **مثال 3-3**

**بطريقة تحليل المؤثر أوجد الحل العام للمعادلة**

 **, X ≠ 2 ( X + 2 )Y´´ – ( 2X + 5 ) Y´ + 2Y = 2**

 **نكتب المعادلة على الصورة**

**) -------- ( 3-3-1 [ ( X + 2 ) – ( 2X + 5 ) D + 2 ] Y = 2**

**حيث D =**

 **( 10 )**

 **وبتحليل الطرف الايسر للمعادلة3-3-1) ( تصبح على الصورة**

 **) -------- (3-3-2 ( ( X+ 2 ) D – 1 ) ( D – 2 ) Y = 2**

**نفترض ان ( D – 2 ) Y = Z ------- (3-3-3 )**

**بالتعويض عن) 3-3-3 ) في3-3-2 ) (نحصل على**

 **( ( X+ 2 ) D – 1 ) Z = 2**

أو - Z = 2 **2 )**  **(X +**

بالقسمةعلى **( X + 2 ) ، تصبح**

 **Z = 2 ( X + 2) ----------- (3-3-4 )**

المعادلة ) 4-3- (3 معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى ويكون عامل التكامل هو

 **= µ(X ) =**

 **وعلى ذلك فأن**

 **2 ( X +2 )**

 **ويكون حل المعادلة 4)-3- (3 هو + Z =**

 **+ ( X + 2 ) ---------- (3-3-5 ) Z = ( X + 2 )**

بالتعويض عن) 5 -3- (3في) 3-3-3 (

 **+ ( X + 2 ) ( D – 2 ) Y = ( X + 2 )**

 أ و +  **( X + 2** ) **– 2Y = ( X + 2 )**

 ( 11 )

 وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى ، ويكون عامل التكامل هو

 =  **= =
 =**

 **] ( X + 2 ) - + [ =**

 أي أن الحل العام يكون

  **+ ( X + 2 ) - - Y =**

**Y=**

ملاحظة :- عند استخدام طريقة تحليل المؤثر ( عموما ) فأن

 **[ D + ( X ) ] [ D + (X ) ] ≠ [ D + (X ) ] [ D+ (X) ]**

4-3 استخدام صيغة ابل في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية :

 أولا : المعادلة التفاضلية المتجانسة :

 إذا كانت لدينا المعادلة  **Y´´ + P(X ) Y´ + q (X ) Y = 0** وكان **(X ) , (X )** هما حلا

 للمعادلة ، حيث **P(X ) , q ( X )**  دالتين متصلتين في الفترة a*تمكن ابل من*

 *حساب قيمة W* **{ , ; X}** *أو*  **W { (X) , (X )** *} بالصيغة**الآتية:*

**W { , ; X } = W { ,; }**

*حيث*  **a X b**

*وهذه الصيغة تعرف باسم صيغة ابل ، ونلاحظ أن*  **W { ,; }** *قيمة ثابتة لأنها عند*

*نقطة معينة* *وتستخدم هذه الصيغة في إيجاد حل المعادلة المتجانسة من الرتبة الثانية*

 *( 12 )*

 *إذا علم احد الحلين ، وليكن*  **( X )** *فأن*

 **Y ( X ) = W { , ; X } Y (X ) ds**

*وحيث ان* **W {** *ومقدار ثابت فأننا نعتبره مساويا الوحدة ، وبالتبسيط*

 *يمكن ان نكتب dS*

*حيث يكون الحل العام*  **Y (X ) = (X ) + (X )**

 *ثانيا : المعادلة غير المتجانسة :*

*باستخدام صيغة ابل ، امكن حل المعادلة غير المتجانسة*

**Y ´´ + P (X ) Y´ + q (X ) = r ( X )**

*وذلك اذا علم*حل للمعادلة المتجانسة ، فيكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة على الصورة  **Y ( X ) = (X ) + ( X ) +**

حيث *الحل الأخر للمعادلة المتجانسة ، ونحصل على*  **W { }**

*باستخدام صيغة ابل*

 **W {**

وباعتبار= 1 w {

 *فان الحل العام يكون على الصورة*  **ds****Y ( X ) = (X) + ( X ) +**

 *( 13 )*

 *مثال 4-3*

 *إذا علم إن*  **= X**  *حل للمعادلة*

**( X – 1 ) Y´´ – X Y´ + Y = 0 , X≠ 1**

*فأوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية باستخدام صيغة ابل*

*الحل / / لنتحقق اولا ان* *حل للمعادلة ، ثم نضع المعادلة على الصورة*

**Y´´ + P ( X ) Y´ + q(X )Y = 0**

*أي على الصورة*  **Y = 0 Y´ + Y´´ -**

*حيث* **P ( X ) = -**

 **-**

 **= X + ln ( X – 1 )**

*وباستخدام صيغة ابل*

**dX**

**X dx = = X**

توجد *بالتجزئة*

 *( 14 )*

**dv = dx du =** **dx V=** **Let u =**

**dx = + dx**

 **] = = X [**

 ويكون الحل العام على الصورة +  **Y(X) =**

5-3 استبدال المتغير المستقلليكن لدينا المعادلة التفاضلية

  **--------- (3-5-1 ) + Q Y = R + P**

 **حيث Q , R , P** دوال في X ، وباستبدال المتغير المستقل X بالمتغير Z اي Z = f (X )

 مثلا فيكون  **=**

 = ( ) =

 **+ . ) . ( =**

 **( =**

 **. + =**

وبالتعويض في المعادلة) 1-5-3 ( نحصل على

 **Q Y = R + P . +**

أو **+ P**  **+ (**

 **(** 15 )

 بالقسمة على *نحصل على*

**2)** *-5-* **(** *3 ------*  *+* **P**

**=**

 ) *3*-5-(3 ----------------
 ,  **=**   **=**

حيث , , دوال في  **X** فقط ( ويمكن تحويلهم إلى دوال في **Z** باستخدام

 التعويض **Z = f ( X ) )** إذا ساوينا بالثابت فأن تصبح ثابتا أيضا وبالتالي يمكن حل المعادلة2)-5-3) لأنها معادلة خطية ذات معاملات ثابتة ويمكن تلخيص خطوات الحل بهذه الطريقة على النحو التالي :

i ) نجعل معامل **Y** يساوي الوحدة اي تكون المعادلة على الصورة

 **Y´´ + P Y ´ + Q Y = R --------( 3-5- 4 )**

 **ii)** نفترض ان **Q = K f (X) ثم** نفرض العلاقة بين **X , Z** على الصورة

  **= K f ( X ) حيث K** ثابت ما

 iii ) من الخطوة ( ii ) يكون

 --------------- (3-5-5 )  **= +** (مهملا الإشارة السالبة )

 ومنها**dX ------------ (3-5-6) Z =**

 **iv** من العلاقة) 6- 5 -3 ( بين **Z , X**  يمكن تحويل المعادلة ) 4-5- ( 3 الى الصورة 16) )

  **+ + Y = ----------- ( 3-5-7 )**

حيث ,  **=**

 ) 8-5-3 ( = =

 من) 5-5-3 (نرى ان  **=** ثابت ما وبعد ذلك نحسب

 فاذا كانت تساوي ثابت فانه يمكن حل المعادلة 7)-5-3)لأنها معادلة خطية ذات معادلة خطية ذات معاملات ثابتة . اما اذا لم تكن كذلك فتفشل هذه الطريقة

V بعد حل المعادلة 7 )-5-3 )نعوض عن Z بدلالة X فنحصل على الحل المطلوب

 مثال3-5

حل المعادلة Y´´ **+ Sin X Cos X Y´ + 4Y =0**  **(**

الحل : نكتب المعادلة على الصورة

 =0 -------- ( 3-5-1 ) + Cot X Y´ + 4 Cos e  **Y´´**

 **فيكون , R = 0 --------- ( 3-5-2 ) P = CotX , Q = 4 Cos e X**

نختار Z بحيث

 ------------- ( 3 **-5-3 ) = 4 Cose**

*ومنها نحصل على* **dz = 2CosecX Z = 2ln tan ( X 2 ) ------ (3-5-4 )**

 وباستبدال المتغير المستقل X بالمتغير Z فتحول المعادلة) 3-5-1)الى الصورة

 (17 )

  **--------------- ( 3-5-5) + Y = +**

حيث =

 **=**

 **=**

 **= 0 =**

وبالتعويض في المعادلة 3-5-5)) نحصل على

 **+ Y = 0 ( + 1 ) Y = 0 , =**

*ويكون الحل على الصورة*  **Sin Z CosZ+ Y =**

**Cos [ 2ln tan ( X /2 )] + Sin [ 2ln tan(X/2)]**  **=**

*( 18 )*

*6 -3 المعادلة التامة*

 *يقال إن المعادلة التفاضلية*

 **( X ) Y´´ + ( X ) Y´ + ( X ) Y = f ( X ) ------ ( 3-6-1)**

 *تامة إذا أمكن إيجاد معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى يكون تفاضلها هو المعادلة( 1-6-3)*

 *وبعبارة أخرى تكون المعادلة***)** *1-6-3* **(***تامة إذا أمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة تفاضلية*

 *من الرتبة الأولى ومثال ذلك المعادلة التفاضلية*

 *+* **1 ) Y´´ + 3XY´ + Y = 3** **(**

*تامة لان تنتج من تفاضل المعادلة*

 **+ 1 ) Y´ + XY´ + XY** *=* **(**

*وسنسرد النظرية التالية بدون برهان*

 *نظرية* **:**

 *الشرط الضروري والكافي لتكون المعادلة( 1-6-3) تامة هو*

 **( X) – ( X ) + (X ) =0**

*وبالتالي يكون التكامل الاول للمعادلة ( 1 -6-3) هو*

 **Y´ + ( - ) y = ---------- ( 3-6-2 )**

 *(19)*

 مثال 3-6

 *اثبت إن المعادلة*  **(C os X ) Y´´ + ( 2Sin X ) Y´ + ( 3 Cos X )Y =** *تامة*

 *الحل*

 *بالمقارنة بالمعادلة*  ***3-6-1****))نجد ان*

 **= Cos X , = ( 2 Sin X ) , = 3Cos X**

*وعلى ذلك فان*

 **= - Sin X , = -Cos X , ´ = 2Cosx , = 3Cos X**

*وبتطبيق الشرط*  **- + =0**

*نحصل على* **-CosX – 2Cos X + 3Cos X =0**

*وعلى ذلك فان المعادلة المعطاة تامة*

*7 -3 المعادلة المزاملة*

 *إذا لم تكن المعادلة التفاضلية*

**)****L(Y ) = ( X ) Y´´ + ( X ) Y´ + ( X ) Y = 0 ----------- (3-7-1**

*تامة فإننا نبحث عن عامل تكامل Z( X ) بحيث يكون* **Z L ( X )** *تفاضل تام إي يكون* **Z L ( Y ) =**  *حيث مؤثر تفاضلي من الرتبة الأولى**وبالتكامل بالتجزئ*

*اي حيث مؤثر تفاضلي من الرتبة الاولى وعلى ذلك*

*فان* **Z L (X )** *تصبح تفاضلا تاما اذا كان*

 *(20)*

 *-* **(**  *´´*  **( Z ) = (**

*من ذلك نرى إن البحث عن عامل التكامل للمعادلة(1-7-3)قادنا إلى البحث عن حل لمعادلة تفاضلية أخرى من الرتبة الثانية) 2-7-3 (تسمى المعادلة(2-7-3) بالمعادلة المزاملة للمعادلة*

**)** *1-7-3* **(***يسمى* **L** *بالمؤثر المزامل للمؤثر* **L** *فإذا أمكننا إيجاد الحل Z للمعادلة( 2-7-3) فان*

 *Z هي عامل التكامل للمعادلة 1* **)- (3-7** *الذي يحولها إلى معادلة خطية يسهل حلها هذا وقد*

 *لا نستطيع حل المعادلة المزاملة***)** *2-7-3* **(***. وتوجد حالات خاصة يسهل فيها حل المعادلة*

*المزاملة* **)** *2-7-3* **(***.*

*ملاحظة : المعادلة المزاملة للمعادلة***)** *2-7-* **( 3** *هي المعادلة***)** *1-7-3* **(**

*المعادلة المزاملة ذاتيا*

*تعريف 1-7-3*

*يقال إن المعادلة* **)** *1-7-(3 مزاملة ذاتيا إذا كانت المعادلة المزاملة***)** *2-7-3* **(***لها نفس صورة المعادلة الأصلية( 1-7-***(3** *. إي تكون المعادلة 1)-7-3 (متزاملة ذاتيا إذا كان*

 **( Y )= L (Y )**

*مثال 7-3*

*معادلة بسل من الرتبة صفر* **XY´´ + Y´ + XY =0** *تكون المعادلة المزاملة لها هي*

**( XZ )´´ - Z ´ + XZ =0 XZ´´ + Z´ + XZ =0**

*وهي نفس صورة المعادلة الأصلية بالتالي فهي متزاملة ذاتيا*

*ملاحظة : إذا كتب المعادلة السابقة (( بعد القسمة على*  **(( X** *على الصورة*

 *=0 Y´ +* **Y****Y´´ +** *تكون المعادلة المزاملة لها هي*

**Z )´ + Z = 0** **Z´´ - (**

 **Z + Z =0 Z + Z´´ -**

*وليس نفس صورة المعادلة الأصلية وبالتالي فهي غير متزاملة ذاتيا وسنسرد النظريات التالية بدون برهان*

 *(21)*

 نظرية (1 ) :

 الشرط الضروري والكافي لكي تكون المعادلة 1)-7-(3 متزاملة ذاتيا هو

 (**X ) =**

 نظرية ( 2 ):

اذا كانت المعادلة التفاضلية 1)-7-3) متزاملة ذاتيا فانه يمكن كتابتها على صورة

 (

*نظرية ( 3 ) :*

*اي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ( على الصورة (1-7-3) ) تصبح متزاملة ذاتيا اذا ضربت في العامل*

 *,* **0 dx ) exp (**

*ملحوظة :- من نظرية ( 3 ) يتضح انه ليس هناك نقص في التعميم اذا كتبنا المعادلة*

 *المزاملة ذاتيا*

 **(X) Y = 0 (X ) Y´ )´ + L( Y ) = (**

*على**الصورة*

 *)* **L(Y ) =( P ( X)Y´ )´ + q( X ) Y = 0 --------- ( 3-7-3**

*وتعرف المعادلة) 3-7-3 (بمعادلة* **Sturm Liouville** *وهي تلعب دور كبيرا في مسائل القيم*

 *الحدية :*

  **( 22 )**

 **8 -3 اختزال الرتبة**

 **ليكن = u (X) هو حل المعادلة التفاضلية**

 **) (X) Y = 0 -------- ( 3-8-1 + (X) + (X)**

**ونستخدم التحويل= Y = uv للحصول على الحل الثاني حيث v(X) =vدالة مجهولة يراد تحديدها . وعلى ذلك**

 **= ( u(X) v(X) )´ = u´ v + u v´ ------- ( 3 -8 -2 )**

 **= u´´ v + 2u´ v´ + u v´´ ----------- ( 3 -8 -3)**

 **وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على**

 **(X) u v = 0 (X) [ u´ v + u v´ ] + (X) [u´´ v + 2 u´ v´ + u v´´ ] +**

 **أو**

**u v´´ + ( 2 u´ + u ) v´ + ( u´´ + u´ + u ) v =0**

 **وبالتالي فأن**

 **= 0 u ) u´ + + ( 2 u**

 **ويوضع W = نحصل على**

 **) W = 0 -------- ( 3 -8 – 4) u´ + + ( 2 u**

 **وهي معادلة خطية ومنها ] dX + = - [ 2**

 **( 23 )**

 **ويكون حلها هو**

 **dx ] W = c exp [ -**

 **أي إن d x = V =**

 **وباختبار C = I يكون الحل الثاني هو**

 **= uv=**

 **وهذا الحلان مستقلان خطيا لان**

 **(X) v´ = = ) = W( u ,**

 **0 d s = exp [ -**

 **ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو**

 **= u + Y**

 **( 24 )**

 **مثال 8-3**

 **إذا كان Y = X هو احد حلول المعادلة التفاضلية**

 **- 2X + 1 ) (**

**اوجد الحل الأخر المستقل خطيا بطريقة اختزال الرتبة**

 **الحل /**

 **حيث إن Y = X تحقق المعادلة المعطاة نفرض إن الحل الأخر هو= X.v**

**وبالتعويض في المعادلة نحصل على**

 **+ 2 =0 + 1 )**

 **ويوضع W = نحصل على**

 **+ 2W = 0 + 1 ) X (**

 **وبحل هذه المعادلة التفاضلية نحصل على**

 **W =**

 **وباختيار C = I وبالتكامل نحصل على**

 **V = X-**

 **ويكون الحل الثاني هو**

 **1 - ) = = X ( X -**

 **وهذان الحلان مستقلان خطيا لان**

 **+ 1 - = 2 = ) (X) W ( u ,**

 **ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية على الصورة**

 **+1 ) ( X + Y =**

 **حيث ثابتان اختياريان**

 **( 25 )**

 **المصــــــــادر**

**1 – رشيد عبدالرزاق, معروف محمد حديد, المعادلات التفاضلية و تطبيقاتها, وزارة التعليم العالي والبحث العلمي,**

**2ــ د. زياد عبدالكريم القاضي, محمد خليل ابوزلطة , مصباح جمعة عقل, نظم المعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلية الجزئية, مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع,2010م**

**3ــ د. زياد عبدالكريم القاضي, محمد خليل ابوزلطة , مصباح جمعة عقل, المعادلات التفاضلية مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع,2009م**

**4ــ نورة دهبي ,المعادلات التفاضلية, دار صفاء للنشر والتوزيع,2005م**