**جمهورية العراق /وزارة التعليم العالي والبحث العلمي**  **جامعة القادسية /علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات**

**قسم الرياضيات**

**المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية**

**ذات المعاملات المتغيرة**

**بحث تقدمت به الطالبة**

**ولاء ناصـــر خضيــر**

**الى كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات/قسم الرياضيات**

**وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات**

**إشراف**

**الدكتور قصي حاتم الكفاري**

**1438هـ 2017م**





**اهدي هذا العمل المتواضع**

**إلى**

**الوالدين الكريمين حفظهما الله**

**والى كل إفراد أسرتي**

**والى أرواح شهداء العراق الأبرار رحمهم الله وأدخلهم**

**فسيح جناته والى روح جدي رحمه الله**

**والى كل الأصدقاء ومن كانوا برفقتي ومصاحبتي إثناء**

**دراستي الجامعية**

**والى كل من لم يدخر جهدا في مساعدتي**

**والى كل من ساهم في تلقيني ولو بحرف في حياتي الدراسية**

**شكر وتقدير**

**لا يسعنا بعد الانتهاء من إعداد هذا البحث إلا إن أتقدم**

**بجزيل الشكر وعظيم الامتنان إلى أستاذي الفاضل**

**الدكتور قصي ألكفاري**

**الذي تفضل بالإشراف على هذا البحث حيث قدم لي**

**كل النصح والإرشاد طيلة فترة الإعداد فله مني كل**

**الشكر والتقدير**

**الخـــــلاصـــة**

**تضمن هذا البحث مقدمة عن المعادلات التفاضلية واستخدامها في الحياة) العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى العلوم الاقتصادية والاجتماعية)**

**كما تضمن المفاهيم الأساسية للمعادلة التفاضلية وأنواعها**

**واختص هذا البحث بالمعادلات التفاضلية من الرتبة**

**الثانية ذات المعاملات المتغيرة وطرق حلها مع الأمثلة**

**المحتـــويــــات**

|  |  |
| --- | --- |
| **الموضــــــــــــــــــــوع** | **الصفحــــــــــــة** |
| **المقدمة** | **1** |
| **المفاهيم الاساسية** | **2 – 3** |
| **طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية**  **ذات المعاملات المتغيرة** | **4** |
| **طريقة تغير البارامترات** | **4 – 6** |
| **طريقة التحويل الى الصورة القياسية** | **7 - 9** |
| **طريقة تحليل المؤثر** | **9 – 12** |
| **استخدام صيغة ابل** | **12 – 14** |
| **استبدال المتغير المستقل** | **15 -18** |
| **المعادلة التامة** | **19 – 20** |
| **المعادلة المزاملة** | **20 -21** |
| **نظريات المعادلة المزاملة** | **22** |
| **اختزال الرتبة** | **23 – 25** |

**الفصــــل الأول**

**المقدمـــــة**

**1– المقــــــــــدمــــــــة**

**ما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم**

**العلـوم الفيزيائية والهندسيـة والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها**

**في دراسـة التحليـل الرياضي وامتـدت استخـداماتهـا في العلـوم الاقتصاديـة والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضليـة وتزايدت**

**أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها .**

**وتتمثل المعادلات التفاضلية بالخطيـة واللاخطيــة والمتجانسـة**

**وغير المتجانسة والتامة ومعادلات التفاضلية الجزئية والمعادلات**

**التفاضلية الاعتيادية وغيرها من المعادلات التفاضلية لكننا سوف**

**نتنــاول في بحثنـــا هذا نــوع من هذه المعـادلات التفاضليـة وهي**

**المعـادلات التفاضليـة من الرتبـة الثانيـة ذات المعامـلات المتغيـرة**

**وطرق حلها مع الأمثلة على طرق حلها.**

**( 1 )**

**الفصـــل الثانـــي**

**المفـاهيــم الاســاسـيـة**

**2 – المفاهيم الأساسية :-**

**1– 2المعادلة التفاضلية :- هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن X ومتغير تابع**

**وليكن Y(x )واحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية y , y´ ,……..أي أنها على الصورة**

**العامة ( 1-2 ) F(X , Y ,Y´, Y´´,……. ) = 0 ………**

**2 – 2 رتبة المعادلة :- هي رتبة اعلي معامل تفاضلي في المعادلة .**

**3– 2 درجة المعادلة :- هي درجة ( قوة ) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن**

**تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية .**

**4 – 2 حل المعادلة التفاضلية : تسمى الدالة Y = Y(x ) حلا للمعادلة التفاضلية**

**F( X, Y ,Y ´ ,Y´´ ,…….) = 0 أذا كانت :**

**-1قابلة للاشتقاق n مرة .**

**-1تحقق المعادلة التفاضلية أي) = 0 F ( x , Y(x ) ,(x ) ,Y´´(x ) , …….**

**5 -2 الحل العام :- هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية ويحقق المعادلة**

**التفاضلية.**

**6 – 2 الحل الخاص :- هو الذي يحقق المعادلة التفاضلية ولا يشتمل على أي ثوابت**

**اختيارية وقد يحصل عليه أحيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية**

**في الحل العام بقيم محددة.**

**( 2 )**

**7– 2 المعادلة التفاضلية الخطية :- تكون المعادلة التفاضلية خطية إذا كان المتغير**

**التابع ومشتقاته في المعادلة التفاضلية من الدرجة**

**الأولى وصيغتها هي :**

**………..(2-2)**

**8 – 2 المعادلة التفاضلية المتجانسة :- تسمى المعادلة التفاضلية**

**M (x ,t ) dx + N (x, y ) dy = 0 ……………… ( 2-3 ) متجانسة اذا كان كل من**

**N , M دالة متجانسة من نفس الدرجة علما ان F ( X , Y ) دالة متجانسة من درجة**

**n إذا كان f ( x ,λ y ) = f ( x , y ) ……… (2- 4)**

**λ R**

**وتكون المعادلة التفاضلية غير متجانسة إذا كانت المعادلة( 3–(2 لا تساوي صفر .**

**9 – 2 المعادلة التفاضلية التامة :- تسمى المعادلة التفاضلية**

**( x) y +(x )y + (x ) y = f( x) ……. (2-5) تامة إذا أمكن إيجاد معادلة**

**تفاضلية من الرتبة الأولى يكون تفاضلها هو المعادلة 5)- (2 وبعبارة أخرى تكون**

**المعادلة) 5- (2تامة إذا أمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى .**

**10-2 المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة على**

**صورة العامة**

**……… (2-6 )**

**( 3 )**

**الفصـــل الثالث**

**طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات**

**المتغيرة**

**3– طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة**

**3-1طريقة تغير البارامترات ( الوسائط )**

**إذا علم إن الحلين للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة للمعادلة ( 6 – 2 )هما**

**( x ) , ( x ) وبالتالي فأن**

**(1ـ1ـ3) = ( X ) + ( X ) + -----------**

**حيث (x) , ( x ) حلان مستقلان , ثابتان اختياريان نفترض إن الحل**

**الخاص على الصورة**

**= ( X ) + (X ) --------- (3-1 -2)**

**حيث , دالتان في X ويمكن إيجاد كل منها حيث :**

**r ( x ) dx ( X ) =**

**( X) =**

**وذلك بحل المعادلتين**

**( X ) ( X ) + ( X ) ( X ) =0 ----------- (3- 1- 3 )**

**( X ) (X ) + ( X ) ( X ) = r ( X ) ------------- (3- 1- 4)**

**(4 )**

**مثال 1-3**

**اوجد الحل العام للمعادلة :**

**( 2X + 1 ) ( X + 1 ) Y´´ + 2XY´ – 2Y = ( 2X + 1 ------------- ( 3-1-1)**

**بعد إثبات إن كلا من , Y = X Y = حل خاص للمعادلة المتجانسة6)– 2 )**

**الحل :-**

**تكون المعادلة المتجانسة المناظرة ) 6–2 (على الصورة**

**( 2X + 1 ) ( X + 1 ) Y´´ + 2XY´ – 2Y = 0 -------- (3-1-2)**

1. **نثبت أن Y = X حل المعادلة) (3-1-2 حيث Y´ = 1 , Y´´ = 0**

**أي الطرف الأيمن = 2X – 2X = 0 الطرف الأيسر**

1. **نثبت أن Y = حل المعادلة3-1-2)) حيث**

**Y´ = , Y´´ =**

**الطرف الأيسر = + 2X - ( 2X + 1 ) ( X + 1 )**

**= - - = - =0**

**الطرف الأيمن = من أ , ب نجد أن**

**، حلان مستقلان للمعادلة(3-1-2)**

**( 5 )**

**أي أن حل المعادلة المتجانسة هو**

**= ( X ) + ( X )**

**حيث , ثابتان اختياريان**

**نضع المعادلة المعطاة على الصورة العامة :-**

**Y´´ + Y´ - Y =**

**حيث - -1 , X بالمقارنة بالمعادلة العامة نجد أن :**

**r ( x ) =**

**وعلى ذلك فأن حل المعادلة المتجانسة يكون على الصورة**

**( X ) = X + ( X ) + =**

**حيث , ثابتان**

**نفرض الحل الخاص على الصورة = ( X ) X + ( X )**

**حيث**

**r( x )dx r(x) dx , ( x ) = (X ) =**

**وبالتالي فأن**

**W{ = = - = =**

**فيكون**

**( X )= . dx = = x**

**( 6 )**

**( x ) = - dx = -**

**- =**

**وعلى ذلك يكون الحل الخاص هو**

**=X . X+ [**

**=**

***ويكون الحل العام على الصورة***

**+ Y = X +**

**) *2-3* (*التحويل إلى الصورة القياسية***

***إذا كان لدينا المعادلة*) *1-2-3* (Y´´ + P(X) Y´ +q(x) Y= r(x )-------**

***تستخدم التعويض* y = uv *حيث* u *دالة اختيارية* v *دالة في* X *وعلى ذلك فأن***

**Y´ = uv´ + u´v , Y ´´= uv´´ + 2u´v´ +u´´v**

***بالتعويض في*) *1-2-3* (*نجد إن***

**) *2-2-3* (uv´´ + ( 2u´ +p u )v´ + ( u´´ + p u´ + q u ) v = r ---------**

**حيث u , v , p , q , r *دوال في* X**

***نختار u بحيث تحقق* 2u´ + pu =0**

***وبالتالي فأن* u = exp [**

**أي u =**

**( 7 )**

**ثم بالتعويض عن u , u´ , u´´ في المعادلة 2-2)-3 (تصبح المعادلة على الصورة**

**V´´ + I ( X ) V = R(X ) -------- (3-2-3)**

**حيث , R (X ) = p - I (X ) = q -**

**المعادلة (3-2-3) تسمى الصورة القياسية للمعادلة3-2-1)) وهي تكون على صورة معادلة**

**تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة أو على صورة معادلة أويلر كوشي وبحلها نحصل على**

**الدالة v ، وبذلك نحصل على الحل العام Y = uv .**

**مثال 2-3**

**بالتحويل إلى الصورة القياسية ، أوجد الحل العام للمعادلة**

**0 < X , 4 Y ´´+4XY ´+ ( – 1 ) Y = 0**

**الحل :-**

**نضع المعادلة على الصورة**

**) Y = 0 Y ´ + ( Y´´ +**

**بالمقارنة بالمعادلة Y´´ + P ( X ) Y´ + q (x ) y = r (x )**

**نجد أن p (x ) =**

**نختار u =**

**نستخدم التعويض v y = للتحويل الى الصورة القياسية فيكون**

**( 8 )**

**V V´ + V´ - V´´ - V , Y´´ = V´ - Y´ =**

**V V´ + V´´ - =**

**بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن**

**V - V + V´ - V + V´ + V ´´ -**

**في V = 0 V ´´ +**

**المعادلة على الصورة القياسية**

**V = 0 V´´ +**

**فتكون**

**X X + Sin V = CoS**

**الحل العام للمعادلة يكون :-**

**X ] X + Sin [ Cos Y =**

**3-3 طريقة تحليل المؤثر**

**وهي طريقة سهلة اذا كانت قابلة للتطبيق ، وهي طريقة تختزل المعادلة من الرتبة الثانية**

**الى المعادلة من الرتبة الاولى .**

**اذا كان لدينا المعادلة**

**Y´´ + P ( X ) Y´ + q ( X ) Y = r (X ) ---------( 3-3-1)**

**أو + P (X ) D + q ( X )) Y = r (x ) )  
 (9)**

**وامكن تحليل المؤثر التفاضلي كما يأتي :-**

**[ + P ( X ) D + q ( X ) ] Y = ( D + ( X ) ) ( D + ( X ) ) Y**

**تصبح المعادلة على الصورة ( D + ( X ) ) ( D + ( X ) ) Y = r (X )**

**ثم نفترض أن**

**( D + (X ) ) Y = Z --------- ( 3-3-2)**

**وعلى ذلك فأن**

**( D + (X ) ) Z = r (X )**

**أو + (X) Z = r (X )**

**وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى ، وبحلها نحصل على قيمة Z وبالتعويض في**

**( 3-3- 2 ) عن Z = Z(X ) تصبح) 3-3-2)على صورة**

**+ ( X) Y = Z(X)**

**وهي ايضا معادلة خطية من الرتبة الاولى في Y وبحلها نحصل على الحل العام Y .**

**مثال 3-3**

**بطريقة تحليل المؤثر أوجد الحل العام للمعادلة**

**, X ≠ 2 ( X + 2 )Y´´ – ( 2X + 5 ) Y´ + 2Y = 2**

**نكتب المعادلة على الصورة**

**) -------- ( 3-3-1 [ ( X + 2 ) – ( 2X + 5 ) D + 2 ] Y = 2**

**حيث D =**

**( 10 )**

**وبتحليل الطرف الايسر للمعادلة3-3-1) ( تصبح على الصورة**

**) -------- (3-3-2 ( ( X+ 2 ) D – 1 ) ( D – 2 ) Y = 2**

**نفترض ان ( D – 2 ) Y = Z ------- (3-3-3 )**

**بالتعويض عن) 3-3-3 ) في3-3-2 ) (نحصل على**

**( ( X+ 2 ) D – 1 ) Z = 2**

أو - Z = 2 **2 )**  **(X +**

بالقسمةعلى **( X + 2 ) ، تصبح**

**Z = 2 ( X + 2) ----------- (3-3-4 )**

المعادلة ) 4-3- (3 معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى ويكون عامل التكامل هو

**= µ(X ) =**

**وعلى ذلك فأن**

**2 ( X +2 )**

**ويكون حل المعادلة 4)-3- (3 هو + Z =**

**+ ( X + 2 ) ---------- (3-3-5 ) Z = ( X + 2 )**

بالتعويض عن) 5 -3- (3في) 3-3-3 (

**+ ( X + 2 ) ( D – 2 ) Y = ( X + 2 )**

أ و +  **( X + 2** ) **– 2Y = ( X + 2 )**

( 11 )

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى ، ويكون عامل التكامل هو

=  **= =   
 =**

**] ( X + 2 ) - + [ =**

أي أن الحل العام يكون

**+ ( X + 2 ) - - Y =**

**Y=**

ملاحظة :- عند استخدام طريقة تحليل المؤثر ( عموما ) فأن

**[ D + ( X ) ] [ D + (X ) ] ≠ [ D + (X ) ] [ D+ (X) ]**

4-3 استخدام صيغة ابل في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية :

أولا : المعادلة التفاضلية المتجانسة :

إذا كانت لدينا المعادلة  **Y´´ + P(X ) Y´ + q (X ) Y = 0** وكان **(X ) , (X )** هما حلا

للمعادلة ، حيث **P(X ) , q ( X )**  دالتين متصلتين في الفترة a*تمكن ابل من*

*حساب قيمة W* **{ , ; X}** *أو*  **W { (X) , (X )** *} بالصيغة**الآتية:*

**W { , ; X } = W { ,; }**

*حيث*  **a X b**

*وهذه الصيغة تعرف باسم صيغة ابل ، ونلاحظ أن*  **W { ,; }** *قيمة ثابتة لأنها عند*

*نقطة معينة* *وتستخدم هذه الصيغة في إيجاد حل المعادلة المتجانسة من الرتبة الثانية*

*( 12 )*

*إذا علم احد الحلين ، وليكن*  **( X )** *فأن*

**Y ( X ) = W { , ; X } Y (X ) ds**

*وحيث ان* **W {** *ومقدار ثابت فأننا نعتبره مساويا الوحدة ، وبالتبسيط*

*يمكن ان نكتب dS*

*حيث يكون الحل العام*  **Y (X ) = (X ) + (X )**

*ثانيا : المعادلة غير المتجانسة :*

*باستخدام صيغة ابل ، امكن حل المعادلة غير المتجانسة*

**Y ´´ + P (X ) Y´ + q (X ) = r ( X )**

*وذلك اذا علم*حل للمعادلة المتجانسة ، فيكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة على الصورة  **Y ( X ) = (X ) + ( X ) +**

حيث *الحل الأخر للمعادلة المتجانسة ، ونحصل على*  **W { }**

*باستخدام صيغة ابل*

**W {**

وباعتبار= 1 w {

*فان الحل العام يكون على الصورة*  **ds****Y ( X ) = (X) + ( X ) +**

*( 13 )*

*مثال 4-3*

*إذا علم إن*  **= X**  *حل للمعادلة*

**( X – 1 ) Y´´ – X Y´ + Y = 0 , X≠ 1**

*فأوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية باستخدام صيغة ابل*

*الحل / / لنتحقق اولا ان* *حل للمعادلة ، ثم نضع المعادلة على الصورة*

**Y´´ + P ( X ) Y´ + q(X )Y = 0**

*أي على الصورة*  **Y = 0 Y´ + Y´´ -**

*حيث* **P ( X ) = -**

**-**

**= X + ln ( X – 1 )**

*وباستخدام صيغة ابل*

**dX**

**X dx = = X**

توجد *بالتجزئة*

*( 14 )*

**dv = dx du =** **dx V=** **Let u =**

**dx = + dx**

**] = = X [**

ويكون الحل العام على الصورة +  **Y(X) =**

5-3 استبدال المتغير المستقلليكن لدينا المعادلة التفاضلية

**--------- (3-5-1 ) + Q Y = R + P**

**حيث Q , R , P** دوال في X ، وباستبدال المتغير المستقل X بالمتغير Z اي Z = f (X )

مثلا فيكون  **=**

= ( ) =

**+ . ) . ( =**

**( =**

**. + =**

وبالتعويض في المعادلة) 1-5-3 ( نحصل على

**Q Y = R + P . +**

أو **+ P**  **+ (**

**(** 15 )

بالقسمة على *نحصل على*

**2)** *-5-* **(** *3 ------*  *+* **P**

**=**

) *3*-5-(3 ----------------   
 ,  **=**   **=**

حيث , , دوال في  **X** فقط ( ويمكن تحويلهم إلى دوال في **Z** باستخدام

التعويض **Z = f ( X ) )** إذا ساوينا بالثابت فأن تصبح ثابتا أيضا وبالتالي يمكن حل المعادلة2)-5-3) لأنها معادلة خطية ذات معاملات ثابتة ويمكن تلخيص خطوات الحل بهذه الطريقة على النحو التالي :

i ) نجعل معامل **Y** يساوي الوحدة اي تكون المعادلة على الصورة

**Y´´ + P Y ´ + Q Y = R --------( 3-5- 4 )**

**ii)** نفترض ان **Q = K f (X) ثم** نفرض العلاقة بين **X , Z** على الصورة

**= K f ( X ) حيث K** ثابت ما

iii ) من الخطوة ( ii ) يكون

--------------- (3-5-5 )  **= +** (مهملا الإشارة السالبة )

ومنها**dX ------------ (3-5-6) Z =**

**iv** من العلاقة) 6- 5 -3 ( بين **Z , X**  يمكن تحويل المعادلة ) 4-5- ( 3 الى الصورة 16) )

**+ + Y = ----------- ( 3-5-7 )**

حيث ,  **=**

) 8-5-3 ( = =

من) 5-5-3 (نرى ان  **=** ثابت ما وبعد ذلك نحسب

فاذا كانت تساوي ثابت فانه يمكن حل المعادلة 7)-5-3)لأنها معادلة خطية ذات معادلة خطية ذات معاملات ثابتة . اما اذا لم تكن كذلك فتفشل هذه الطريقة

V بعد حل المعادلة 7 )-5-3 )نعوض عن Z بدلالة X فنحصل على الحل المطلوب

مثال3-5

حل المعادلة Y´´ **+ Sin X Cos X Y´ + 4Y =0**  **(**

الحل : نكتب المعادلة على الصورة

=0 -------- ( 3-5-1 ) + Cot X Y´ + 4 Cos e  **Y´´**

**فيكون , R = 0 --------- ( 3-5-2 ) P = CotX , Q = 4 Cos e X**

نختار Z بحيث

------------- ( 3 **-5-3 ) = 4 Cose**

*ومنها نحصل على* **dz = 2CosecX Z = 2ln tan ( X 2 ) ------ (3-5-4 )**

وباستبدال المتغير المستقل X بالمتغير Z فتحول المعادلة) 3-5-1)الى الصورة

(17 )

**--------------- ( 3-5-5) + Y = +**

حيث =

**=**

**=**

**= 0 =**

وبالتعويض في المعادلة 3-5-5)) نحصل على

**+ Y = 0 ( + 1 ) Y = 0 , =**

*ويكون الحل على الصورة*  **Sin Z CosZ+ Y =**

**Cos [ 2ln tan ( X /2 )] + Sin [ 2ln tan(X/2)]**  **=**

*( 18 )*

*6 -3 المعادلة التامة*

*يقال إن المعادلة التفاضلية*

**( X ) Y´´ + ( X ) Y´ + ( X ) Y = f ( X ) ------ ( 3-6-1)**

*تامة إذا أمكن إيجاد معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى يكون تفاضلها هو المعادلة( 1-6-3)*

*وبعبارة أخرى تكون المعادلة***)** *1-6-3* **(***تامة إذا أمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة تفاضلية*

*من الرتبة الأولى ومثال ذلك المعادلة التفاضلية*

*+* **1 ) Y´´ + 3XY´ + Y = 3** **(**

*تامة لان تنتج من تفاضل المعادلة*

**+ 1 ) Y´ + XY´ + XY** *=* **(**

*وسنسرد النظرية التالية بدون برهان*

*نظرية* **:**

*الشرط الضروري والكافي لتكون المعادلة( 1-6-3) تامة هو*

**( X) – ( X ) + (X ) =0**

*وبالتالي يكون التكامل الاول للمعادلة ( 1 -6-3) هو*

**Y´ + ( - ) y = ---------- ( 3-6-2 )**

*(19)*

مثال 3-6

*اثبت إن المعادلة*  **(C os X ) Y´´ + ( 2Sin X ) Y´ + ( 3 Cos X )Y =** *تامة*

*الحل*

*بالمقارنة بالمعادلة*  ***3-6-1****))نجد ان*

**= Cos X , = ( 2 Sin X ) , = 3Cos X**

*وعلى ذلك فان*

**= - Sin X , = -Cos X , ´ = 2Cosx , = 3Cos X**

*وبتطبيق الشرط*  **- + =0**

*نحصل على* **-CosX – 2Cos X + 3Cos X =0**

*وعلى ذلك فان المعادلة المعطاة تامة*

*7 -3 المعادلة المزاملة*

*إذا لم تكن المعادلة التفاضلية*

**)****L(Y ) = ( X ) Y´´ + ( X ) Y´ + ( X ) Y = 0 ----------- (3-7-1**

*تامة فإننا نبحث عن عامل تكامل Z( X ) بحيث يكون* **Z L ( X )** *تفاضل تام إي يكون* **Z L ( Y ) =**  *حيث مؤثر تفاضلي من الرتبة الأولى**وبالتكامل بالتجزئ*

*اي حيث مؤثر تفاضلي من الرتبة الاولى وعلى ذلك*

*فان* **Z L (X )** *تصبح تفاضلا تاما اذا كان*

*(20)*

*-* **(**  *´´*  **( Z ) = (**

*من ذلك نرى إن البحث عن عامل التكامل للمعادلة(1-7-3)قادنا إلى البحث عن حل لمعادلة تفاضلية أخرى من الرتبة الثانية) 2-7-3 (تسمى المعادلة(2-7-3) بالمعادلة المزاملة للمعادلة*

**)** *1-7-3* **(***يسمى* **L** *بالمؤثر المزامل للمؤثر* **L** *فإذا أمكننا إيجاد الحل Z للمعادلة( 2-7-3) فان*

*Z هي عامل التكامل للمعادلة 1* **)- (3-7** *الذي يحولها إلى معادلة خطية يسهل حلها هذا وقد*

*لا نستطيع حل المعادلة المزاملة***)** *2-7-3* **(***. وتوجد حالات خاصة يسهل فيها حل المعادلة*

*المزاملة* **)** *2-7-3* **(***.*

*ملاحظة : المعادلة المزاملة للمعادلة***)** *2-7-* **( 3** *هي المعادلة***)** *1-7-3* **(**

*المعادلة المزاملة ذاتيا*

*تعريف 1-7-3*

*يقال إن المعادلة* **)** *1-7-(3 مزاملة ذاتيا إذا كانت المعادلة المزاملة***)** *2-7-3* **(***لها نفس صورة المعادلة الأصلية( 1-7-***(3** *. إي تكون المعادلة 1)-7-3 (متزاملة ذاتيا إذا كان*

**( Y )= L (Y )**

*مثال 7-3*

*معادلة بسل من الرتبة صفر* **XY´´ + Y´ + XY =0** *تكون المعادلة المزاملة لها هي*

**( XZ )´´ - Z ´ + XZ =0 XZ´´ + Z´ + XZ =0**

*وهي نفس صورة المعادلة الأصلية بالتالي فهي متزاملة ذاتيا*

*ملاحظة : إذا كتب المعادلة السابقة (( بعد القسمة على*  **(( X** *على الصورة*

*=0 Y´ +* **Y****Y´´ +** *تكون المعادلة المزاملة لها هي*

**Z )´ + Z = 0** **Z´´ - (**

**Z + Z =0 Z + Z´´ -**

*وليس نفس صورة المعادلة الأصلية وبالتالي فهي غير متزاملة ذاتيا وسنسرد النظريات التالية بدون برهان*

*(21)*

نظرية (1 ) :

الشرط الضروري والكافي لكي تكون المعادلة 1)-7-(3 متزاملة ذاتيا هو

(**X ) =**

نظرية ( 2 ):

اذا كانت المعادلة التفاضلية 1)-7-3) متزاملة ذاتيا فانه يمكن كتابتها على صورة

(

*نظرية ( 3 ) :*

*اي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ( على الصورة (1-7-3) ) تصبح متزاملة ذاتيا اذا ضربت في العامل*

*,* **0 dx ) exp (**

*ملحوظة :- من نظرية ( 3 ) يتضح انه ليس هناك نقص في التعميم اذا كتبنا المعادلة*

*المزاملة ذاتيا*

**(X) Y = 0 (X ) Y´ )´ + L( Y ) = (**

*على**الصورة*

*)* **L(Y ) =( P ( X)Y´ )´ + q( X ) Y = 0 --------- ( 3-7-3**

*وتعرف المعادلة) 3-7-3 (بمعادلة* **Sturm Liouville** *وهي تلعب دور كبيرا في مسائل القيم*

*الحدية :*

**( 22 )**

**8 -3 اختزال الرتبة**

**ليكن = u (X) هو حل المعادلة التفاضلية**

**) (X) Y = 0 -------- ( 3-8-1 + (X) + (X)**

**ونستخدم التحويل= Y = uv للحصول على الحل الثاني حيث v(X) =vدالة مجهولة يراد تحديدها . وعلى ذلك**

**= ( u(X) v(X) )´ = u´ v + u v´ ------- ( 3 -8 -2 )**

**= u´´ v + 2u´ v´ + u v´´ ----------- ( 3 -8 -3)**

**وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على**

**(X) u v = 0 (X) [ u´ v + u v´ ] + (X) [u´´ v + 2 u´ v´ + u v´´ ] +**

**أو**

**u v´´ + ( 2 u´ + u ) v´ + ( u´´ + u´ + u ) v =0**

**وبالتالي فأن**

**= 0 u ) u´ + + ( 2 u**

**ويوضع W = نحصل على**

**) W = 0 -------- ( 3 -8 – 4) u´ + + ( 2 u**

**وهي معادلة خطية ومنها ] dX + = - [ 2**

**( 23 )**

**ويكون حلها هو**

**dx ] W = c exp [ -**

**أي إن d x = V =**

**وباختبار C = I يكون الحل الثاني هو**

**= uv=**

**وهذا الحلان مستقلان خطيا لان**

**(X) v´ = = ) = W( u ,**

**0 d s = exp [ -**

**ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو**

**= u + Y**

**( 24 )**

**مثال 8-3**

**إذا كان Y = X هو احد حلول المعادلة التفاضلية**

**- 2X + 1 ) (**

**اوجد الحل الأخر المستقل خطيا بطريقة اختزال الرتبة**

**الحل /**

**حيث إن Y = X تحقق المعادلة المعطاة نفرض إن الحل الأخر هو= X.v**

**وبالتعويض في المعادلة نحصل على**

**+ 2 =0 + 1 )**

**ويوضع W = نحصل على**

**+ 2W = 0 + 1 ) X (**

**وبحل هذه المعادلة التفاضلية نحصل على**

**W =**

**وباختيار C = I وبالتكامل نحصل على**

**V = X-**

**ويكون الحل الثاني هو**

**1 - ) = = X ( X -**

**وهذان الحلان مستقلان خطيا لان**

**+ 1 - = 2 = ) (X) W ( u ,**

**ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية على الصورة**

**+1 ) ( X + Y =**

**حيث ثابتان اختياريان**

**( 25 )**

**المصــــــــادر**

**1 – رشيد عبدالرزاق, معروف محمد حديد, المعادلات التفاضلية و تطبيقاتها, وزارة التعليم العالي والبحث العلمي,**

**2ــ د. زياد عبدالكريم القاضي, محمد خليل ابوزلطة , مصباح جمعة عقل, نظم المعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلية الجزئية, مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع,2010م**

**3ــ د. زياد عبدالكريم القاضي, محمد خليل ابوزلطة , مصباح جمعة عقل, المعادلات التفاضلية مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع,2009م**

**4ــ نورة دهبي ,المعادلات التفاضلية, دار صفاء للنشر والتوزيع,2005م**