③ ⓐ $\int \tan x\,dx$ ⓑ $\int \tan^3 x\,dx$ ⓒ $\int \tan^3(4x)\,dx$ ⓓ $\int \tan^5 x\,dx$

Solu

ⓐ $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$

ⓓ $\int \tan^5 x\,dx = \int \tan x (\tan^2 x)^2\,dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1)^2\,dx$

$= \int \tan x (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1)\,dx$

$\therefore \int \tan^5 x\,dx = \int \tan x \sec^4 x\,dx - 2\int \tan x \sec^2 x\,dx + \int \tan x\,dx$

Let $u = \sec x \longrightarrow du = \sec x \tan x\,dx$

$\therefore \int \tan^5 x\,dx = \int u^3\,du - 2\int u\,du - \ln|\cos x| + c$

$= \frac{1}{4}u^4 - u^2 - \ln|\cos x| + c$

$\therefore \int \tan^5 x\,dx = \frac{1}{4}\sec^4 x - \sec^2 x - \ln|\cos x| + c$

② عندما m عدد زوجي موجب و n عدد حقيقي فأننا نستخدم المطابقة

$\sec^m x = \sec^{m-2} x \cdot \sec^2 x = (1+\tan^2 x)^{\frac{m-2}{2}} \cdot \sec^2 x$

ثم نفرض أن $u = \tan x$ لذلك $du = \sec^2 x\,dx$ وبذلك نقوم بإجراء التكامل كما يلي:

$\int \tan^n x \sec^m x\,dx = \int \tan^n x \cdot (1+\tan^2 x)^{\frac{m-2}{2}} \cdot \sec^2 x\,dx$

$= \int u^n (1+u^2)^{\frac{m-2}{2}}\,du$

ثم نجد التكامل بأستخدام قوانين التكامل السابقة وكما هو موضح في الأمثلة الآتية:

Examples: Find

1) $\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx$

$= \int \tan^2 x (1+\tan^2 x) \sec^2 x\,dx$