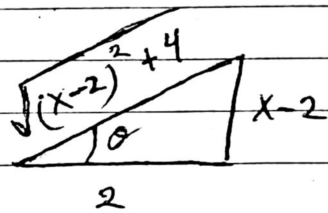
④ تكاملات من النوع ax^2+bx+c أو $\sqrt{ax^2+bx+c}$

حيث إن $a\neq 0$ و $b\neq 0$

لحل هذا النوع من التكاملات يتم اولاً بإكمال المربع ومن ثم استخدام طريقة التعويضات المثلثية

Examples: Find

① $\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+8}$



$x^2-4x+8=(x^2-4x+4)+8-4=(x-2)^2+4$

$\therefore \int \frac{x\,dx}{x^2-4x+8}=\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2+4} \Longrightarrow$ Let $x-2=2\tan\theta$

$\therefore dx=2\sec^2\theta\,d\theta$

$\therefore \int \frac{x\,dx}{(x-2)^2+4}=\int \frac{(2+2\tan\theta)\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta}{4\tan^2\theta+4}=\int \frac{\cancel{4}(1+\tan\theta)\cancel{\sec^2\theta}\,d\theta}{\cancel{4}\cancel{\sec^2\theta}}$

$=\int(1+\tan\theta)\,d\theta=\int d\theta+\int\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta=\theta-\ln|\cos\theta|+c$

$\therefore \int \frac{x\,dx}{x^2-4x+8}=\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)-\ln\left|\frac{2}{\sqrt{(x-2)^2+4}}\right|+c$

② $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} \Longrightarrow 8+2x-x^2=8-(x^2-2x)=8-(x^2-2x+1-1)$
$=8-(x^2-2x+1)+1=9-(x-1)^2$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} \Longrightarrow$ Let $x-1=3\sin\theta \Longrightarrow dx=3\cos\theta\,d\theta$