$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}} = \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta}$$

$$= \int d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + c$$

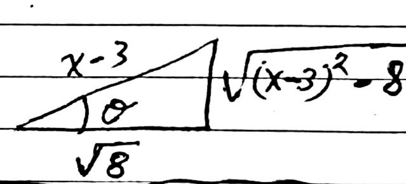
③ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9-9+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-8}}$$

$\Rightarrow$ Let $x-3 = \sqrt{8}\cdot\sec\theta \Rightarrow dx = \sqrt{8}\,\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-8}} = \int \frac{\sqrt{8}\,\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{8\sec^2\theta-8}}$$

$$= \int \frac{\cancel{\sqrt{8}}\,\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}\, d\theta}{\cancel{\sqrt{8}}\,\cancel{\tan\theta}} = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \ln\left|\frac{x-3}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{(x-3)^2-8}}{\sqrt{8}}\right| + c$$



Exercise: Find ① $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$ ② $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ ③ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$

④ $\int \frac{x\, dx}{x^2+6x+10}$ ⑤ $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$ ⑥ $\int \frac{dx}{2x^2+4x+7}$ ⑦ $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

⑤ التكامل بالكسور الجزئية (Integration by partial Fractions)

إن عملية تجزئة الكسر الى كسور جزئية بسيطة تفيدنا في اجراء عملية التكامل للكسور المعقدة بتجزئتها الى كسور بسيطة ثم نكاملها بسهولة . في الحقيقة إن عملية تجزئة الكسر هي العملية العكسية لجمع الكسور .

لقد سبق وأن عرفنا الدالة f بأنها متعددة حدود من الدرجة n اذا كانت بالشكل :-

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$