$$\frac{A_1X+B_1}{(aX^2+bX+c)}+\frac{A_2X+B_2}{(aX^2+bX+c)^2}+\cdots+\frac{A_nX+B_n}{(aX^2+bX+c)^n}$$

حيث إن $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ ثوابت حقيقية يمكن إيجادها وكما هو موضح في الأمثلة الآتية :-

Example: Find $\int \frac{2X^2+3}{(X^2+1)^2}\,dx$

$$\frac{2X^2+3}{(X^2+1)^2}=\frac{AX+B}{(X^2+1)}+\frac{CX+D}{(X^2+1)^2}$$

$$\frac{2X^2+3}{(X^2+1)^2}=\frac{(AX+B)(X^2+1)+CX+D}{(X^2+1)^2}$$

بضرب الطرفين بـ $(X^2+1)^2$ ينتج أن :-

$$2X^2+3=(AX+B)(X^2+1)+CX+D$$
$$=AX^3+AX+BX^2+B+CX+D$$

$$2X^2+3=AX^3+BX^2+(A+C)X+(B+D)$$

بمساواة معاملات قوى X للطرفين ينتج أن :-

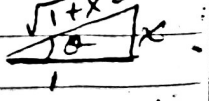
$A=0$ and $B=2$ and $A+C=0 \rightarrow C=0$ and $B+D=3 \rightarrow D=1$

$$\therefore \frac{2X^2+3}{(X^2+1)^2}=\frac{2}{X^2+1}+\frac{1}{(X^2+1)^2}$$

$$\therefore \int \frac{2X^2+3}{(X^2+1)^2}\,dx=2\int\frac{dx}{X^2+1}+\int\frac{dx}{(X^2+1)^2}=2\tan^{-1}x+\int\frac{dx}{(X^2+1)^2}$$

بنحل

Let $x=\tan\theta \rightarrow dx=\sec^2\theta\,d\theta$



$$\therefore \int\frac{dx}{(X^2+1)^2}=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta}=\int\frac{d\theta}{\sec^2\theta}=\int\cos^2\theta\,d\theta=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int d\theta+\frac{1}{2}\int\cos 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+c=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+c$$

$$\therefore \int\frac{2X^2+3}{(X^2+1)^2}\,dx=2\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+c$$