

Example Find the integral

Ⓐ $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$ Ⓑ $\int \sin^3 x dx$ Ⓒ $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$

Soln
Ⓐ $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$

$n=5$ (odd) and $m=2$

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \sin x \cdot \sin^4 x \cos^2 x dx \\ &= \int \sin x (\sin^2 x)^2 \cos^2 x dx \\ &= \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x dx \end{aligned}$$

Let $u = \cos x \rightarrow du = -\sin x dx$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int (1-u^2)^2 u^2 (-du)$$

$$= -\int (1-u^2)^2 u^2 du = -\int (1-2u^2+u^4) u^2 du$$

$$= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = -\left[\frac{u^3}{3} - \frac{2}{5} u^5 + \frac{1}{7} u^7 \right] + C$$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C$$

Ⓑ $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx$

Let $u = \cos x \rightarrow du = -\sin x dx$ (ثم عوضنا واكمل الحل)

Ⓒ عندما m عدد زوجي موجب و n عدد حقيقي فاننا نستخدم الطريقة

$$\cos^m x = \cos^{m-1} x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \cos x$$

ثم نضع $u = \sin x$ لذلك فان $du = \cos x dx$ وبالتعويض يصبح