الفصل الثاني

الحلول العددية للمعادلات اللاخطيه

بشكل عام المعادلات الخطيه هي المعادلات التي يكون فيها على الأقل حد واحد بحيث يكون معامل المجهول مجهول أخر. أي ان درجه المعادله تكون اكثر من واحد وامثله على هذاالنوع من المعادلات هي المعادلات الاتيه:-

$$\left.\begin{array}{l} x^2+3x+1=0 \\ x-\sin x=0 \\ e^x-x=0 \end{array}\right\}$$ بمتغير واحدx

$$\left.\begin{array}{l} x+xy+x2+y2=0 \\ x^2-y^2=0 \end{array}\right\}$$ بمتغيرين x,y

ويمكن كتابه المعادله التي تحتوي على متغير واحد بشكل عام كالاتي:-

$F(x)=0$

ملاحظه:

العدد $a\in R$ يسمى جذر للمعادله $F(x)=0$ اذا كان $F(a)=0$

ان الكثير من المعادلات اللاخطيه يصعب ايجاد الجذور لها بالاساليب التقليديه المعروفه(الاساليب الجبريه) لذا نلجا الى ايجاد الجذور التقريبيه بدلا من الجذور المضبوطة(excat root)للمعادله اللاخطيه$F(x)=0$.

ملاحظه:

اذا كان $a\in R$ الجذر المضبوط للمعادله $F(x)=0$ و $\bar{a}$' هو لجذر التقريبي الى aفان:-

$$|a-\bar{a}|<\in \qquad\qquad |f(\bar{a})|<\in$$

حيث ان $\in$(ابسلون) هي مقدار صغير جدا.

حساب التقريبات الأولية لجذور معادله لا خطية:-

سنعرض أسلوبين لتعين تقر يبات أولية لموقع الجذور الحقيقية معادله $f(x)=0$ حيث ان f دالة مستمرة.

تعين مواقع الجذور بالرسم البياني:-

تعيين مواقع الجذور بطريقه مبرمجه:-

تعتمد هذه الطريقه على ملاحظة تغير الاشارات لقيم لدالة في نقاط متعدده $x_1,x_2,\ldots x_n$ فاذا كانت قيمه $f(x_i)*f(x_i+1)$ سالبة لبعض قيم I فن هناك جذرا بين x_i,x_{i+1} .

مثال :- عين مواقع جذور المعادلة

$$f(x)=x^4-7x^3+3x^2+26x-10=0$$

في الفترة[8,8-].

الحل ك- اذا اخذنا طول فترة التقسيم hمتساوية الى ٤ أي ان h=4 فان اشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يلي:-

x	-8	-4	0	4	8
F(x)	+	+	-	-	+

أي عند اختيار h=4 فانه يوجد جذرين فقط الاول في الفترة (4,0-)والثاني في الفترة(4,8).
اما اذا اخذنا فترة التقسيم اصغر ولتكن ٢ أي h=2 فان اشارات الدالة تكون كما يلي:-

x	-8	-٦	٤-	-2	0	2	4	6	8
F(x)	+	+	+	+	-	+	-	+	+

أي عند اختيار h=2 فاننا نحصل على اربع جذور مواقعها في الفترات(0,2)و(٢،٤)،(٤،٦) (2,0-).

ملاحظات:-
١-اختيار طول فترة تقسيم صغيرة يؤدي الزيادة في العمليات الحسابية.
٢- اختيار طول فترةالتقسيم كبير يؤدي الى فدان بعض الجذور.

اجب س١
عين مواقع الجذور للمعادلات الاتية.

$$1)\ f(x)=x^3-8x^2+7=0,[-3,3]$$
$$2)\ f(x)=x^4-5x^3-3x^2+x+1=0,[-5,5]$$
$$3)\ f(x)=3x^4+2x^3-x^2+x+1=0,[-8,8]$$

طريقة تنصيف الفترات(Bisection Method): -

عندما تكون الدالة $f(x)=0$ مستمرة في الفترة [a,b] وتحقق الشرط $f(a)*f(b)<0$

فانة يوجد جذر للمعادلة في الفترة[a,b].
يمكن ايجادالقيمة التقريبية للجذر منتصف الفترة [a,b] بالنقطة c ثم حساب قيمة الدالة بالنقطة c فتوجد ثلاث احتمالات للمقدار f(a)*f(c) وهي :-

الاحتمال الاول:
هوان تكون f(a)*f(c)=0 وهذا يعني إن ا لقيمة c هي جذر للمعادلة.

الاحتمال الثاني:
هوان تكون f(a)*f(c)<0 وهذا يعني ان الجذر يقع في الفترة [a,c].

الاحتمال الثالث:
هوان تكون f(a)*f(c)>0 وهذا يعني ان الجذر يقع في الفترة [c,b].

وبعد تحديد الفترة الحاوية على الجذر يمكن تنصف هذه الفترة مرة أخرى وهكذا يمكن الاستمرار في عملية تنصف الفترة الحاوية على الجذر حتى نحصل ا لى الجذر المطلوب.

خوارزمية تنصف الفترات

١- المعطيات وهي الفترة[a,b] التي يقع بداخلها الجذر بحيث ان f(a)*f(c)<0 ، $\in$ كمية صغيرة جدا وموجبة
٢- احسب نقطة المنتصف $c=\frac{a+b}{2}$
٣- اذا كان $|f(c)|<\in$ اطبع قيمة c وتوقف
٤- اذا كانf(a)*f(c)<0 اجعل b=c والا اجعل a=c
٥- ارجع الى لخطوة رقم ٢

مثال:
احسب جذر المعادلة F(x)=lnx-2x+3=0 بطريقة تنصف الفترات في الفترة[1,2] وبدقة $\in$ =٠,٠٠٥.
الحل:

F(a)=f(1)=1
F(b)=f(2)=-0.307
F(1)*f(2)=1*-0.307=-0.307
يوجد جذر للمعادلة في الفترة
[1,2]

$c=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=1.5$, F(c)=f(1.5)=0.40547

∴ ليس c جذر للمعادلة اذن توجد فتراتان هما [1,1.5],[1.5,2]

∵ f(1.5)*f(2)<0

الجذر يقع في الفترة [1.5,2]

$$c = \frac{1.5+2}{2} = 1.75 \Rightarrow f(c) = f(1.75) = 0.05962$$

∴ ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما c [1.5,1.75],[1.75,2]

∵ F(1.75)*f(2) < 0

∴ الجذر يقع في الفترة [1.75,2]

$$c = \frac{1.75+2}{2} = 1.875 \Rightarrow f(c) = f(1.875) = -0.12139$$

∴ ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما c [1.75,1.875],[1.875,2]

∵ F(1.75)*f(1.875) < 0

∴ الجذر يقع في الفترة [1.75,1.875]

$$c = \frac{1.75+1.875}{2} = 1.8125 \Rightarrow f(c) = f(1.8125) = -0.03029$$

∴ ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما c [1.75,1.8125],[1.8125,1.875]

∵ F(1.75)*f(1.8125) < 0

∴ الجذر يقع في الفترة [1.75,1.8125]

$$c = \frac{1.75+1.8125}{2} = 1.78125 \Rightarrow f(c) = f(1.78125) = 0.01482$$

∴ ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما c [1.75,1.78125],[1.78125,1.8125]

∵ F(1.78125)*f(1.8125) < 0

∴ الجذر يقع في الفترة [1.78125,1.8125]

$$c = \frac{1.78125+1.8125}{2} = 1.796875 \Rightarrow f(c) = f(1.796875) = -0.0077$$

$\therefore$ c ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما [1.78125,1.796875],[1.796875,1.8125]

$\because$ F(1.78125)*f(1.796875) < 0

$\therefore$ الجذر يقع في الفترة [1.78125,1.796875]

$$c = \frac{1.78125 + 1.796875}{2} = 1.7890625 \Rightarrow f(c) = f(1.7890625) = 0.0035667$$

$\because$ $\lfloor f(c) \rfloor = |0.0035667| = 0.0035667 < 0.005$

$\therefore$ الجذر هو1.7890625

مثال:- جد جذرا للمعادلة F(x)=lnx+2x+3=0 في الفترة [1,2]

F(a)=f(1)=ln(1)+2.1+3=0+2+3=5>0

F(b)=f(2)=ln(2)+2.2+3=0.69+4+3=7.69>0

F(1).f(2)>0

$\therefore$ لا يوجد جذر للمعادلة في الفتره[1,2]

مثال:- جد جذرا للمعادلة $f(x)=x^2-36$

F(5)=-11<0

F(7) =13>0

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{5+7}{2} = 6$$

f(c) =0 وهو الجذر المضبوط