الفصل الرابع

الاندراج والاستكمال(Interpolation and Extrapolation)

لتكن y=f(x) دالة معرفه في النقاط($x_0,x_1,\ldots\ldots.x_n$) أي ان القيم ($f(x_0),f(x_1)\ldots.f(x_n)$) معلومة ونريد تخمين الدالة عند النقطة x_p. فاذا كانت النقطة x_p واقعة ضمن مدى النقاط ($x_0,x_1,\ldots\ldots.x_n$) فأن العملية التخمين تسمى اندراج(Interpolation) وبعكسه (فاذا كانت النقطة x_p واقعة خارج مدى النقاط فأن العملية التخمين تسمى بالاستكمال (Extrapolation) هناك عده طرق يمكن استخدامها في هذا المجال ومنها متعدده حدود لاكرانج

متعدده حدود لاكرانج(Lagrang Polynomail)

لتكن f دالهحقيقية ومستمرة بالفتره[a,b] وقيمتها معلومة في الفترة ($x_0,x_1,\ldots\ldots.x_n$) لتخمين قيمة الدالة f في نقطة واحده او عده نقاط في بالفتره [a,b] يكون بتقريب الدالة fبمتعدده الحدود في النقاط المطلوبه واعتيارها تخمينا لقيمة f أي إيجاد

متعدده حدود P بحيث ان:-

$$p(x_i) \cong f(x_i), i = 1, 2, 3 \ldots \ldots . n$$

ان اعلى درجه لمتعدده حدود P هي n وذلك لانها يجب ان توافق الدالة f في n+1 من النقاط.

ان الصيغة العامه لمتعدده حدود لاكرانج هي:-

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

When n=1

$$p_1(x) = \sum_{j=0}^{1} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{1} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

$$= f(x_0) \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

When n=2

$$p_2(x) = \sum_{j=0}^{2} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

$$= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

When n=3

$$p_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{3} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

$$= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

ملاحظة: ان قيم $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$ تكون مرتبة بالشكل :-

$X_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots\ldots\ldots < x_n$

اما القيم (**$(f(x_0), f(x_1) \ldots . f(x_n))$ فليس من الضروري ان تكون مرتبه.**

مثال:جد تخمينا لقيمة f(2.5) من جدول البيانات الاتية:-

x	2	3
F(x)	5	10

الحل:بما ان عدد النقاط (2) فأن اعلى درجه لمتعدده حدود لاكرانج هو 1 أي ان$\cong$ $f(x_i)$
$p_1(x)$,

$$p_1(x) = \sum_{j=0}^{1} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{1} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$$

$$= f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$= f(2)\frac{(x-3)}{(2-3)} + f(3)\frac{(x-2)}{(3-2)} = 5\frac{(x-3)}{-1} + 10\frac{(x-2)}{1}$$

$$= -5(x-3) + 10(x-2) = -5x + 15 + 10x - 20$$

$$= 5x - 5$$

$$\therefore p_1(x) = 5x - 5 \rightarrow f(x) \cong p_1(x) = 5x - 5 \therefore f(2.5) \cong 5(2.5) - 5$$
$$= 12.5 - 5 = 7.5$$

$$\therefore f(2.5) \cong 7.5$$

ملاحظه :يمكن التحقق عن صحه متعددة الحدود في المثال أعلاه وذلك من خلال التعويض عن كل X بالقيم $x_0=2, x_1=3$ نجد ان:

$$p_1(3) \cong f(3) = 5.3 - 5 = 15 - 5 = 10, p_1(2) \cong f(2) = 5.2 - 5$$
$$= 10 - 5 = 5$$

مثال :من جدول البيانات الاتيةجد

1-متعدده حدود لاكرانج

2- **قيمة f(1.2)**

3- قيمة f(3)

x	-1	0	2
F(x)	2	-1	-5

الحل:بما ان عدد النقاط (3) فأن اعلى درجه لمتعدده حدود لاكرانج هو 2 أي ان$f(x_i) \cong$
$p\_2(x)$,

$$p_2(x)=\sum_{j=0}^{2} f(x_j)\prod_{\substack{i=0\\ j\neq i}}^{2}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$$

$$=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=f(-1)\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)}$$
$$+f(0)\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)}+f(2)\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}$$

$$=2\frac{x(x-2)}{3}+(-1)\frac{(x+1)(x-2)}{-2}+5\frac{x(x+1)}{6}$$
$$=\frac{2}{3}(x^2-2x)+\frac{1}{2}(x^2-x-2)+\frac{5}{6}(x^2+x)$$
$$=2x^2-x-1$$

$$\therefore p_2(x)=2x^2-x-1$$

$$f(x)\cong p_2(x)\rightarrow f(1.2)\cong p_2(1.2)=2(1.2)^2-1.2-1$$
$=0.68$(اندراج)

$f(3)\cong p_2(3)=2(3)^2-3-1=18-3-1=14$(استكمال)

واجب

مثال :من جدول البيانات الاتيةجد

1-متعدده حدود لاكرانج

2- قيمة f(0.5)

3- قيمة f(2)

x	-1	0	1
F(x)	2	1	3