الفصل الخامس

التكامل العددي(numerical integration)

التكامل العددي هو دراسة كيفية ايجاد القيمة التقريبية العددية لتكامل معين. هنالك عد ه طرق لايجاد قيمة التكامل العدي منهما

طريقة شبة المنحرف(the Trapzoidal Metthod)

تعطى هذه الطريقة بالصيغة الاتية:-

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + ...y_{n-1}) + y_n\right]$$ حيث ان:-

F(x): دالة مستمرة بالفترة[a,b].

n: عدد فترات التقسيم (n زوجي او فردي)

$h = \frac{b-a}{n}$ يمثل طول فترة التقسيم

$f_i = f(x_i) = y_i$ لكل i=0,1,…n(أي ان $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$….. وهكذا)

طريقة سمبسون(Simpsoins Method)

تعطى هذه الطريقة بالصيغة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y3 + ...y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4....y_{n-2}) + y_n\right]$$

F(x): دالة مستمرة بالفترة[a,b].

n: عدد فترات التقسيم (n زوجي فقط)

$h = \frac{b-a}{n}$ يمثل طول فترة التقسيم

$f_i = f(x_i) = y_i$ لكل i=0,1,…n(أي ان $y_0(f(x_0), y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$….. وهكذا)

ملاحظة: في طريقة شبة المنحرف تكون النتائج مضبوطة لتكامل دوال من الدرجة الاولى او اقل(أي قيمة الخطا تكون مساوية الى الصفر) اما في طريقة سمبسون فتكون النتائج مضبوطة لتكامل دوال من الدرجة الثالثة او اقل.

مثال:- جد قيمة تقريبة للتكامل بطريقة شبه المنحرف عندما

$$\int_0^1 (x^3 + 1)dx, \qquad n = 5, \qquad n = 2$$

$$a = 0, b = 1$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

بما ان $f(x)=x^3+1$ لذلك نحصل على جدول البيانات التالي:-(بما ان الفترة لدنيا من 0-1 لذا نوقف الفترة عندما نصل الى الواحد)

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	1.008	1.064	1.216	1.512	2

$$\int_a^b f(x^3+1)dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + y5]$$
$$= \frac{0.2}{2}[1 + 2(1.008 + 1.064 + 1.216 + 1.512) + 2] = 1.26$$
$$n = 2$$
$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

بما ان $f(x)=x^3+1$ لذلك نحصل على جدول البيانات التالي:-

x	0	0.5	1
y	1	1.125	2

$$\int_a^b f(x^3+1)dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1) + y_2]$$
$$= \frac{0.5}{2}[1 + 2(1.125 + 2] = 1.3125$$

اما القيمة الحقيقية للتكامل هي:

$$\int_a^b f(x^3+1)dx = \frac{x^4}{4} + x]_0^1 = (\frac{1}{4}+1) - (\frac{0}{4}+0) = \frac{1}{4}+1 = 1.25$$
$$\therefore\ when$$
$$n = 2$$
$$|e_x| = |x - \bar{x}| = |1.125 - 1.3125| = 0.0625$$
$$when$$
$$n = 5$$
$$|e_x| = |x - \bar{x}| = |1.25 - 1.26| = 0.01$$

أي كلما كانت nكبيرة كلما كانت القيمة العددية للتكامل قريبة من القيمة الحقيقية للتكامل.

مثال:- جد قيمة تقريبية للتكامل بطريقة شبه المنحرف عندما

$$\int_0^1 (x+1)dx, n=1, n=4$$
$$a=0, b=1$$
$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{1}=1$$

بما ان $f(x)=x+1$ لذلك نحصل على جدول البيانات التالي:-

x	0	1
y	1	2

$$\int_0^1 f(x1+1)dx=\frac{h}{2}[y_0+y]$$
$$=\frac{1}{2}[1+2]=\frac{3}{2}=1.5$$
$$when$$
$$n=4$$
$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}=0.25$$

بما ان $f(x)=x+1$ لذلك نحصل على جدول البيانات التالي:-

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	1	1.25	1. 25	1.75	2

$$\int_0^1 f(x1+1)dx=\frac{h}{2}[y_0+2(y_1+y_2+y_3)+y_4]$$
$$=\frac{0.25}{2}[1+2(1.25+1.5+1.75)+2]=1.5$$

إما القيمة الحقيقية للتكامل هي:

$$\int_0^1 f(x+1)dx=\frac{x2}{2}+x]_0^1=(\frac{1}{2}+1)-(\frac{0}{2}+0)=\frac{1}{2}+1=1.5$$

هذا يعني إن القيمة التقريبية لتكامل = القيمة الحقيقية وذلك لان الدالة هي متعددة حدود من الدرجة الأولى.

مثال:- جد قيمة تقريبية للتكامل بطريقة سمبسون عندما

$$\int_0^1 (x^2+1)dx, n=2, n=4$$
$$a=0, b=1$$
$$when$$
$$n=2$$
$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{2}=0.5$$

بما ان $f(x)=x^2+1$ لذلك نحصل على جدول البيانات التالي:-

x	0	0.5	1
y	1	1. 25	2

$$\int_0^1 f(x^2+1)dx=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2]$$
$$=\frac{0.5}{3}[1+4(1.25)+2]=\frac{4}{3}=1.33333$$
$$when$$
$$n=4$$
$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{4}=0.25$$

بما إن $f(x)=x^2+1$ لذلك نحصل على جدول البيانات التالي:-

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	1	1.062 5	1.25	1.5625	2

$$\int_0^1 f(x^2+1)dx=\frac{h}{3}[y_0+4(y_1+y3)+2(y_2)+y4]$$
$$=\frac{0.25}{3}[1+4(1.0625+1.5625)+2(1.25)+2]=1.33333$$

اما القيمة الحقيقية للتكامل هي:

$$\int_0^1 f(x^2+1)dx=\frac{x^3}{3}+x]_0^1=(\frac{1}{3}+1)-(\frac{0}{3}+0)=\frac{1}{3}+1=1.333333$$
$$\therefore when \quad n=2, n=4$$
$$|e_x|=|x-\bar{x}|=|1.333333-1.333333|=0$$

أي لقيمة الحقيقية للتكامل = القيمة التقريبية وذلك لان الدالة هي متعددة حدود من الدرجة الثانية

مثال:- جد قيمة تقريبية للتكامل بطريقة سمبسون عندما

$$\int_0^2 x^2 e^{-x^2}\,dx, n = 8$$

$$a = 0, b = 2$$

$$when$$

$$n = 8$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0.25$$

x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
y	0	0.05 871	0.1947 0	0.3205 0	0.3678 8	0.3275 2	23715 0.	0.143 24	0.0732 6

بما ان $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ لذلك نحصل على جدول البيانات التالي:-

$$\int_0^2 x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\begin{bmatrix} 1 + 4(0.05871 + 0.32050 + 0.32752 + 0.14324) + \\ 2(0.19470 + 0.36788 + 0.23715) + 0.07326 \end{bmatrix} = 0.42272$$

مثال(واجب):- جد قيمة تقريبية للتكامل بطريقة شبة المنحرف عندما n=5

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$$