Lecture (12)

Checking the Numerical Stability

12.1 Introduction

ان استقرارية الأنظمة العددية مرتبطة بشكل وثيق مع الخطأ العددي. فنظام الفرق المحدد يكون مستقراً اذا كانت الأخطاء المعمولة في خطوة زمن معينة من الحسابات لا تسبب نمو متزايداً في الأخطاء مع استمرار الحسابات. ان النظام ذو الاستقرارية المتعادلة هو ذلك الذي تكون فيه الأخطاء ثابتة مع استمرار الحسابات. اما اذا تناقصت الأخطاء او تم اخمادها في النهاية فيقال ان النظام مستقر. واذا كان الحال معكوساً بحيث تنمو الأخطاء مع الزمن فأن النظام العددي يسمى غير مستقر *unstable* .

بالنسبة للمسائل المعتمدة على الزمن، فأن الاستقرارية تضمن بأن الطريقة العددية تنتج حل مقيد *bounded solution* عندما يكون حل المعادلة التفاضلية المضبوطة مقيداً. الاستقرارية، بصورة عامة، يمكن ان تكون صعبة الفحص، وخاصة عندما تكون المعادلة المأخوذة بنظر الاعتبار غير خطية *nonlinear*.

ان الفرق بين الحل العددي *Numerical solution* والحل الصحيح او المضبوط *True or exact solution* هو:

$$\boldsymbol{u_{i,j}} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{i}\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{j}\Delta\boldsymbol{t}) \qquad \dots (12.1)$$

والذي يمثل الخطأ للحل العددي. ولأن الحل المضبوط $\boldsymbol{u_{i,j}} \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ هو غير محصل عليه اعتيادياً (الحل الذي يحسب بدون خطأ مدور round-off error)، فأننا لا نستطيع في الغالب تحديد هذا الخطأ. على اية حال، نستطيع تخمين دقة النظام accuracy of the scheme بدلالة Δx و Δt.

تعريف: ان الحل $u_{i,j}$ يكون مستقراً اذا بقي الخطأ مقيداً bounded عند زيادة j .

ان استقرارية النظام هي صفة بالغة الاهمية. فهناك أنظمة متناسقة ذات درجة عالية من الدقة (تأخذ عدد أكبر من حدود متسلسلة تايلر) ولكنها تعطي حلولاً تبتعد بشكل غير مقبول عن الحل المضبوط. وعليه يجب معرفة الاستقرارية.

هناك ثلاثة طرق لمعرفة الاستقرارية:

١. الطريقة المباشرة direct method

٢. طريقة الطاقة energy method

٣. طريقة فون نيومان Von Neumann's method

12.2 Direct Method الطريقة المباشرة

نحن نعلم ان الحل الصحيح هو حل مقيد وعليه يكون كافياً لاختبار تقييدية الحل العددي. من الممكن كتابة معادلة التأفق .advection eq التي هي:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + c\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} = 0 \qquad \ldots (12.2)$$

بالشكل التالي:

$$u_{i,j+1} = (1-\mu)u_{i,j} + \mu u_{i-1,j} \qquad \ldots (12.3)$$

where $\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ ... (12.4)

اذا كان $0 \leq \mu \leq 1$ والذي يعتبر كشرط ضروري للتقارب $(c\Delta t \leq \Delta x)$ يكون لدينا:

$$|u_{i,j+1}| \leq (1-\mu)|u_{i,j}| + \mu|u_{i-1,j}| \qquad \ldots . (12.5)$$

سنطبق هذه العلاقة عند النقطة i عند المستوي j+1 وحيث تكون $|u_{i,j+1}|$ اعظم ما يكون اي عند $Max_{(i)}|u_{j+1}|$:

$$Max_{(i)}|u_{i,j+1}| \leq Max_{(i)}(1-\mu)|u_{i,j}| + Max_{(i)}\mu|u_{i-1,j}|$$

If we assume that $Max_{(i)}|u_{i,j-1}| = Max_{(i)}|u_{i,j}|$ then:

$$Max_{(i)}|u_{i,j+1}| \leq Max_{(i)}|u_{i,j}| - Max_{(i)}\mu|u_{i,j}| + Max_{(i)}\mu|u_{i,j}|$$

$$Max_{(i)}|u_{i,j+1}| \leq Max_{(i)}|u_{i,j}| \qquad \ldots (12.6)$$

وهذا يثبت تقييدية الحل العددي $\boldsymbol{u_{i,j}}$ لجميع الأزمان وعليه $0 \leq \mu \leq 1$ هو شرط كافي لأستقرارية المعادلة (12.2) لهذا النظام، أصبح شرط الاستقرارية نفس شرط التقارب. بتعبير آخر، إذا كان النظام متقارب فأنه مستقر، والعكس بالعكس. رغم ان الطريقة المباشرة هي طريقة بسيطة الا انها ناجحة لعدد محدود فقط من الأنظمة.

11.3 Energy Method طريقة الطاقة

اذا علمنا ان الحل الصحيح هو مقيد، سوف نختبر فيما اذا كان $\sum_i (u_{i,j+1})^2$ مقيداً ايضاً وبالتالي فأن كل $\boldsymbol{u_{i,j}}$ ينبغي ان يكون مقيداً وعليه يتم اثبات استقرارية النظام. ان هذه الطريقة تسمى بطريقة الطاقة بسبب انه في التطبيقات الفيزيائية u^2 غالباً ما تتناسب مع صيغة معينة للطاقة (نحن نعرف بأن الطاقة الحركية $K.E.=1/2\ mv^2$).

وبتربيع المعادلة (12.3) والتي هي $(u_{i,j+1} = (1-\mu)u_{i,j} + \mu u_{i-1,j})$ والجمع على i نحصل على:

$$\sum_i (u_{i,j+1})^2 = \sum_i \left[(1-\mu)^2 (u_{i,j})^2 + 2\mu(1-\mu) u_{i,j}\, u_{i-1,j} + \mu^2 (u_{i-1,j})^2\right] \quad \dots (12.7)$$

للتبسيط، نفترض بان u هي دورية periodic في x ، وأفرض بأن الجمع يكون على دورة كاملة واحدة one complete cycle : وعندئذ:

$$\sum_i (u_{i-1,j})^2 = \sum_i (u_{i,j})^2 \ , \qquad \dots (12.8)$$

Now we use Schwartz's inequality which states that:

$$\sum \boldsymbol{ab} \le \sqrt{\sum \boldsymbol{a^2}}\sqrt{\sum \boldsymbol{b^2}} \qquad \dots (12.9)$$

عندئذ:

$$\sum_i u_{i,j}\, u_{i-1,j} \le \sqrt{\sum_i (u_{i,j})^2}\sqrt{\sum_i (u_{i-1,j})^2} = \sum_i \left(u_{i,j}\right)^2 . \qquad \dots (12.10)$$

باستخدام معادلة (12.8) و (12.10) واذا كانت $0 \le \mu - 1$ فأن (12.7) تعطي المتراجحة التالية:

$$\sum_i (\boldsymbol{u_{i,j+1}})^2 \le [(\boldsymbol{1-\mu})^2 + \boldsymbol{2\mu(1-\mu)} + \boldsymbol{\mu^2}] \sum_i \left(\boldsymbol{u_{i,j}}\right)^2 , \qquad \dots (12.11)$$

or

$$\sum_i (\boldsymbol{u_{i,j+1}})^2 \le \sum_i (\boldsymbol{u_{i,j}})^2 \ . \qquad \dots (12.12)$$

لأن $(\boldsymbol{1-\mu})^2 + \boldsymbol{2\mu(1-\mu)} + \boldsymbol{\mu^2}$ تساوي ١ (جرب ذلك). وعليه $0 \le 1-\mu \le 1$ ، سوية مع شرط الحدود الدوري، يكون شرطاً كافياً لاستقرارية (12.3) .

12.4 Von Neumann's Method

وتسمى احياناً طريقة سلسلة فورير Fourier series وهي الأكثر استخداماً. على اية حال هي لا تستخدم في المعادلات الغير خطية nonlinear equations . ولكن نستطيع استخدامها في المعادلات التي تحولت الى خطية linearized من معادلات غير خطية. حل المعادلة الخطية يمكن ان يعبر عنه على شكل سلسلة فورير. يمكن صياغة سلسلة فورير بدلالة الجيب والجيب تمام ولكن من الأسهل جبرياً استبدالها بما يكافئها من الصيغة الأسية العقدية. سوف نستبدل ترميزنا الشائع $u_{i,j}$ الى $u(ph,qk)=u_{p,q}$ (حتى لا يختلط ترميز العداد i مع دليل العدد العقدي i) حيث $h=\Delta x, k=\Delta t$ وبدلالة هذا الترميز:

$$A_n e^{in\pi x/l} = A_n e^{in\pi ph/Nh} = A_n e^{i\beta_n ph}, \quad ...(12.13)$$

where $\beta_n = \frac{n\pi}{Nh}$ and $Nh = l.$

للتقصي عن انتشار الخطأ مع زيادة t نحتاج لأيجاد حل لمعادلة الفروقات المحددة والذي يختصر الى $e^{i\beta ph}$ عندما t=qk=0 . سوف نفرض بأن الخطأ يمثل بـ:

$$E_{p,q} = e^{i\beta x}e^{\alpha t} = e^{i\beta ph}e^{\alpha qk} = e^{i\beta ph}\lambda^q , \qquad ...(12.14)$$

where $\lambda = e^{\alpha k},$ and $\alpha,$ in general, is a complex constant

ان التعبير اعلاه يمكن ان يختصر الى $e^{i\beta ph}$ عندما q= 0. الخطأ سوف لن يزداد بزيادة t بشرط ان يكون: $|\lambda| \le 1$. وعليه سيكون شرطنا للاستقرارية هو $|\lambda| \le 1$ في هذه الطريقة.

Ex (1). Investigate the stability of the fully-implicit finite –difference equation,

$$\frac{(u_{p,q+1} - u_{p,q})}{k} = \frac{(u_{p-1,q+1} - 2u_{p,q+1} + u_{p+1,q+1})}{h^2} \quad ... (12.15)$$

approximating the parabolic equation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

الحل: بما ان دالة الخطأ $E_{p,q}$ تحقق نفس معادلات الفرق كما هو الحال مع $u_{p,q}$ ، لذا فأن تعويض $E_{p,q}$ من معادلة (12.14) في معادلة (12.15) يعطي:

$$e^{i\beta ph}\lambda^{q+1} - e^{i\beta ph}\lambda^q = r\left\{e^{i\beta(p-1)h}\lambda^{q+1} - 2e^{i\beta ph}\lambda^{q+1} + e^{i\beta(p+1)h}\lambda^{q+1}\right\},$$

where r=k/h^2 . Division by $e^{i\beta ph}\lambda^q$ leads to:

$$\lambda - 1 = r\lambda\left(e^{-i\beta h} - 2 + e^{i\beta h}\right)$$

$$= r\lambda(2cos\beta h - 2) = -4r\lambda\, sin^2(\beta h/2)$$

Hence $\lambda = \frac{1}{1+4r\, sin^2(\frac{\beta h}{2})}$

من المعادلة الأخيرة يتضح ان المعادلة مستقرة لجميع قيم r الموجبة بموجب الشرط $|\lambda| \leq 1$.

Homework: write the above example in details.

Ex (2). The hyperbolic equation $\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x^2$ is approximated by the explicit scheme :

$(u_{p,q+1} - 2u_{p,q} + u_{p,q-1})/k^2 = (u_{p+1,q} - 2u_{p,q} + u_{p-1,q})/h^2$ ... (*)

investigate its stability.

الحل: من السهل اظهار بواسطة الطريقة في Ex.1 بأن معادلة λ هي:

$\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0$,

where $A = 1 - 2r^2 sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$, $r = k/h$ ... (**)

Hence the values of λ are:

$\lambda_1 = A + (A^2-1)^{\frac{1}{2}}$ and $\lambda_2 = A - (A^2-1)^{\frac{1}{2}}$

For stability $|\lambda| \leq 1$

As r, k, β are real, $A \leq 1$ by eq. (**)

When $A < -1$, $|\lambda_2| > 1$, giving instability.

When $-1 \leq A \leq 1$, $A^2 \leq 1$, $\lambda_1 = A + i(1-A^2)^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2 = A - i(1-A^2)^{\frac{1}{2}}$.

hence $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \{A^2 + (1-A^2)\}^{\frac{1}{2}} = 1$,

proving that equation (*) is stable for $-1 \leq A \leq 1$. By eq.(**), we then have:

$-1 \leq 1 - 2r^2 sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq 1$, The only useful inequality is:

$$-1 \leq 1 - 2r^2 sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

giving $r \leq 1$