

الفصل الثاني

الحلول العددية للمعادلات اللاخطية

حساب التقريبات الأولية لجذور معادله لا خطية:-

سنعرض أسلوبين لتعيين تقريبات أولية لموقع الجذور الحقيقية معادله $f(x) = 0$ حيث ان f دالة مستمرة.

1- تعيين مواقع الجذور بالرسم البياني (Graphical Method)

2- تعيين مواقع الجذور بطريقه مبرمجه (Analytical Method):-

تعيين مواقع الجذور بطريقه مبرمجه (Analytical Method):-

تعتمد هذه الطريقه على ملاحظة تغير الاشارات لقيم لدالة في نقاط متعدده x_1, x_2, \dots, x_n فاذا كانت قيمه $f(x_i) * f(x_{i+1})$ سالبة لبعض قيم I فن هناك جذرا بين x_i, x_{i+1} .

مثال :- عين مواقع جذور المعادلة

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$$

في الفترة $[-8, 8]$.

الحل :|| اذا اخذنا طول فترة التقسيم h متساوية الى 4 أي ان $h=4$ فان اشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يلي:-

x	-8	-4	0	4	8
F(x)	+	+	-	-	+

أي عند اختيار $h=4$ فانه يوجد جذرين فقط الاول في الفترة $(-4, 0)$ والثاني في الفترة $(4, 8)$. أما اذا اخذنا فترة التقسيم اصغر ولتكن 2 أي $h=2$ فان اشارات الدالة تكون كما يلي:-

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
F(x)	+	+	+	+	-	+	-	+	+

أي عند اختيار $h=2$ فاننا نحصل على اربع جذور مواقعها في الفترات $(-2, 0)$ و $(0, 2)$ و $(2, 4)$ و $(4, 6)$.

ملاحظات:-

1- اختيار طول فترة تقسيم صغيرة يؤدي الزيادة في العمليات الحسابية.

2- اختيار طول فترة التقسيم كبير يؤدي الى قدان بعض الجذور.

اجب عن :

س1 عين مواقع الجذور للمعادلات الاتية.

$$1) f(x) = x^3 - 8x^2 + 7 = 0, [-3, 3]$$

$$2) f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0, [-5, 5]$$

$$3) f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1 = 0, [-8, 8]$$

طريقة تنصيف الفترات (Bisection Method) :-

عندما تكون الدالة $f(x) = 0$ مستمرة في الفترة $[a, b]$ وتحقق الشرط $f(a) * f(b) < 0$ انه يوجد جذر للمعادلة في الفترة $[a, b]$.
يمكن إيجاد القيمة التقريبية للجذر منتصف الفترة $[a, b]$ بالنقطة c ثم حساب قيمة الدالة بالنقطة c فتوجد ثلاث احتمالات للمقدار $f(a) * f(c)$ وهي :-

الاحتمال الأول:

هوان تكون $f(a) * f(c) = 0$ وهذا يعني إن القيمة c هي جذر للمعادلة.

الاحتمال الثاني:

هوان تكون $f(a) * f(c) < 0$ وهذا يعني ان الجذر يقع في الفترة $[a, c]$.

الاحتمال الثالث:

هوان تكون $f(a) * f(c) > 0$ وهذا يعني ان الجذر يقع في الفترة $[c, b]$.

وبعد تحديد الفترة الحاوية على الجذر يمكن تنصيف هذه الفترة مرة أخرى وهكذا يمكن الاستمرار في عملية تنصيف الفترة الحاوية على الجذر حتى نحصل لى الجذر المطلوب.

خوارزمية تنصيف الفترات

1- المعطيات وهي الفترة $[a, b]$ التي يقع بداخلها الجذر بحيث ان $f(a) * f(c) < 0$, ϵ كمية صغيرة جدا وموجبة

$$2- احسب نقطة المنتصف $c = \frac{a+b}{2}$$$

3- اذا كان $|f(c)| < \epsilon$ اطبع قيمة c وتوقف

4- اذا كان $f(a) * f(c) < 0$ اجعل $b=c$ والا اجعل $a=c$

5- ارجع الى خطوة رقم 2

مثال:

احسب جذر المعادلة $F(x)=\ln x-2x+3=0$ بطريقة تنصف الفترات في الفترة $[1,2]$ وبدقة $\epsilon = 0.005$.

الحل:

$$F(a)=f(1)=1$$

$$F(b)=f(2)=-0.307$$

$$F(1)*f(2)=1*-0.307=-0.307$$

يوجد جذر للمعادلة في الفترة $[1, 2]$

$$c = \frac{a + b}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1.5, F(c)=f(1.5)=0.40547$$

•• ليس c جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما $[1,1.5],[1.5,2]$

$$\bullet \bullet f(1.5)*f(2) < 0$$

الجذر يقع في الفترة $[1.5,2]$

$$c = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75 \Rightarrow f(c) = f(1.75) = 0.05962$$

•• ليس c جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما $[1.5,1.75],[1.75,2]$

$$\bullet \bullet F(1.75)*f(2) < 0$$

•• الجذر يقع في الفترة $[1.75,2]$

$$c = \frac{1.75 + 2}{2} = 1.875 \Rightarrow f(c) = f(1.875) = -0.12139$$

•• ليس c جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما $[1.75,1.875],[1.875,2]$

$$\bullet \bullet F(1.75)*f(1.875) < 0$$

•• الجذر يقع في الفترة $[1.75,1.875]$

$$c = \frac{1.75 + 1.875}{2} = 1.8125 \Rightarrow f(c) = f(1.8125) = -0.03029$$

•• ليس c جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما $[1.75,1.8125],[1.8125,1.875]$

$$\bullet \bullet F(1.75)*f(1.8125) < 0$$

•• الجذر يقع في الفترة $[1.75,1.8125]$

$$c = \frac{1.75 + 1.8125}{2} = 1.78125 \Rightarrow f(c) = f(1.78125) = 0.01482$$

∴ c ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما $[1.75, 1.78125], [1.78125, 1.8125]$

$$\therefore F(1.78125) * f(1.8125) < 0$$

∴ الجذر يقع في الفترة $[1.78125, 1.8125]$

$$c = \frac{1.78125 + 1.8125}{2} = 1.796875 \Rightarrow f(c) = f(1.796875) = -0.0077$$

∴ c ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما $[1.78125, 1.796875], [1.796875, 1.8125]$

$$\therefore F(1.78125) * f(1.796875) < 0$$

∴ الجذر يقع في الفترة $[1.78125, 1.796875]$

$$c = \frac{1.78125 + 1.796875}{2} = 1.7890625 \Rightarrow f(c) = f(1.7890625) = 0.0035667$$

$$\therefore |f(c)| = |0.0035667| = 0.0035667 < 0.005$$

∴ الجذر هو 1.7890625

مثال:- جد جذرا للمعادلة $F(x) = \ln x + 2x + 3 = 0$ في الفترة $[1, 2]$

$$F(a) = f(1) = \ln(1) + 2 \cdot 1 + 3 = 0 + 2 + 3 = 5 > 0$$

$$F(b) = f(2) = \ln(2) + 2 \cdot 2 + 3 = 0.69 + 4 + 3 = 7.69 > 0$$

$$F(1) \cdot f(2) > 0$$

∴ لا يوجد جذر للمعادلة في الفترة $[1, 2]$

مثال:- جد جذرا للمعادلة

$f(x) = x^2 - 36$ في الفترة $[5, 7]$

$$F(5) = -11 < 0$$

$$F(7) = 13 > 0$$

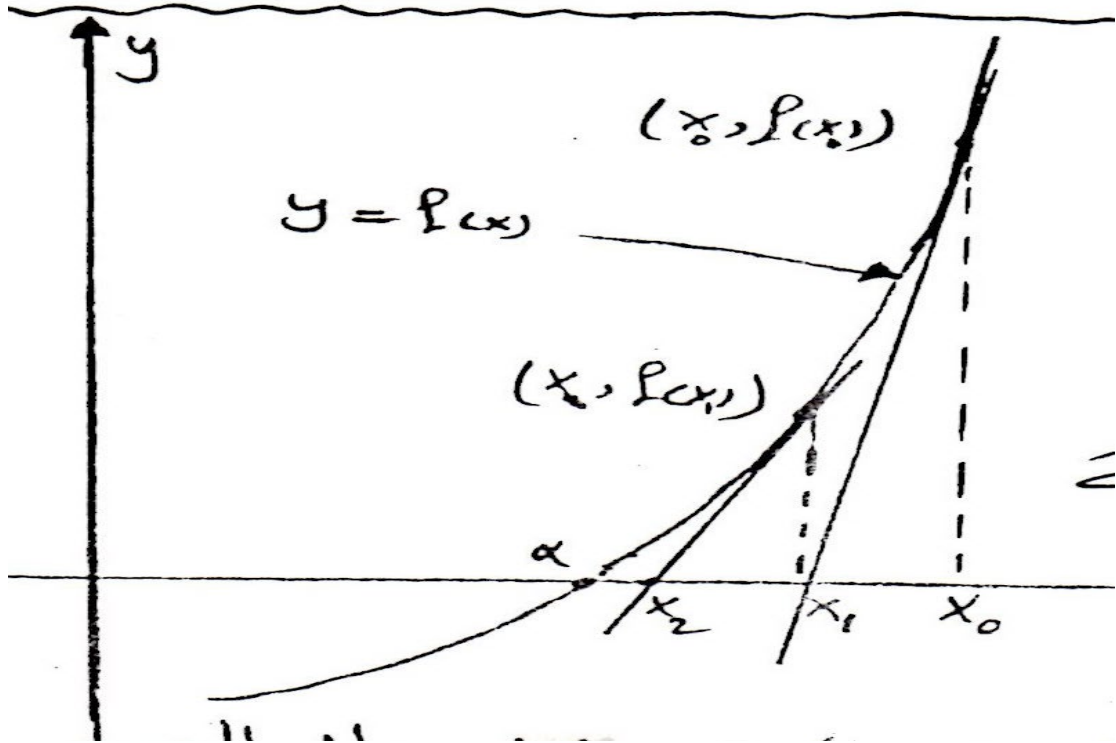
$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{5+7}{2} = 6$$

$$f(c) = 0 \text{ وهو الجذر المضبوط}$$

طريقة نيوتن رافسن (Newton-Raphson method):

تستخدم هذه الطريقة لايجاد الحلول التقريبية للمعادلات الاخطية من النوع $y=f(x)$. في هذه الطريقة نستخدم المستقيم المماس لمنحني لدالة $y=f(x)$ في نقطة معينة حيث يشترط وجود قيمة معينة اوية تقريبية x_0 الحساب متتابعة معينة حيث يشترط وجود قيمة اولية تقريبية للجذر α .

بعد حساب قيمة الدالة $f(x)$ بالنقطة x_0 نرسم مماس للدالة $y=f(x)$ من النقطة $(x_0, f(x_0))$ قاطعا محور x بالنقطة $(x_1, 0)$ حيث تكون تقريبا افضل للجذر α من النقطة السابقة x_0 بعد ذلك نحسب قيمة الدالة $f(x)$ بالنقطة x_1 نرسم مماس للدالة $y=f(x)$ من النقطة $(x_1, f(x_1))$ قاطعا محور x بالنقطة $(x_2, 0)$ حيث تكون تقريبا افضل للجذر α من النقطة السابقة x_1 وهكذا نستمر الى ان نصل الى القيمة المطلوبة للجذر.



ان الصيغة العامة لطريقة نيوتن رافسن هي:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n \geq 0$$

حيث $f'(x)$ المشتقة

الدالة $f(x)$, بالنقطة x_0 بحيث $f'(x) \neq 0$

ملاحظاتك

1- في هذه الطريقة يشترط وجود قيمة اولية تقريبية للجذر α والتي هي x_0

2- في حالة اعطاء فترة معينة مثل $[a,b]$ في السؤال يجب ان تكن الدالة معرفة ومستمرة في تلك الفترة بحيث ان

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

عندها يتم اختيار x_0 أي قيمة داخل الفترة

3- في حالة عدم اعطاء قيمة x_0 في السؤال, يجب اولا استخراج الفترة

التي يوجد بها الجذر باستخدام الطريقة المبرمجة ثم يتم اختيار x_0 أي قيمة داخل تلك الفترة

4- كلما كانت x_0 قريبة من الجذر كلما كانا لاقترب الى الجذر اسرع

5- ايقاف الحسابات التكرارية عندما يتحقق الشرط الاتي

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon \text{ or } |f(x_{n+1})| \leq \epsilon$$

حيث ϵ مقدار صغير يمثل الخطأ المسموح به

خوارزمية نيوتن رافسن

1- حدد المعطيات الدالة $f(x)$, المشتقة $f'(x)$, قيم تقريبية اولية للجذر,

ϵ مقدار الخطأ المسموح به

2- احسب x_n من العلاقة التالية

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n = 1, 2, 3, \dots, n$$

3- إذا كان x_n قيمة x_n وتوقف

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

4- ارجع إلى خطوة رقم 2 .

مثال: جد جذ المعادلة $f(x)=x^2+2.1x-1=0$ بطريقة نيوتن
 رافسونعلما على ان تكون النتائج صحيحة خمسة مراتب عشرية
 مستخدما $x_0=0.5$.
 الحل: \\

$$f(x) = x^2 + 2.1x - 1 \Rightarrow f(0.5) = 0.3$$

$$f'(x) = 2x + 2.1 \Rightarrow f'(0.5) = 3.1$$

$$\therefore x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{0.3}{3.1} = 0.40323$$

$$x_1 = 0.40323 \Rightarrow f(x_1) = f(0.40323) = 0.00938 \quad \& \quad f'(x_1) = f'(0.40323) = 2.90646$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.40323 - \frac{0.00938}{2.90646} = 0.40000$$

$$\therefore x_2 = 0.4000 = 0.4 \Rightarrow f(x_2) = f(0.4) = 0 \quad \& \quad f'(x_2) = f'(0.4) = 2.9$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.4 - \frac{0}{2.9} = 0.4$$

$$\therefore x_3 = x_2 = 0.4$$

$$\therefore |x_3 - x_2| = |0.4 - 0.4| = 0 \leq \epsilon$$

اذن $x_3=0.4$ هو جذر المعادلة

ملاحظات: \\

1- يمكن استخدام صيغة نيوتن رافسن لايجاد الجذر التربيعي لاي عدد $a > 0$ وكلاتي:-

فرض $x = \sqrt{a}$ ومنه ينتج $x^2 = a$ اي ان $F(x) = x^2 - a$ هي المعادلة الخطية المستخدمة في الحل ومن ثم نستخدم الصيغة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0$$

or

او بصورة ابسط

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), n \geq 0$$

مثال : استخدم صيغة نيوتن رافسن لايجاد الجذر التربيعي للعدد 7
مستخدما $x_0=2.5$.

الحل لايجاد المعادلة تكون كلاتي:-

نفرض $x = \sqrt{7}$ ومنه ينتج $x^2 = 7$ اي ان $F(x) = x^2 - 7 = 0$ هي
المعادلة الخطية المستخدمة في الحل ومن ثم نستخدم الصيغة

$$F'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), n \geq 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \left(2.5 + \frac{7}{2.5} \right) = 2.65$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2.65 + \frac{7}{2.65} \right) = 2.64576$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(2.64576 + \frac{7}{2.64576} \right) = 2.64575$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left(x_4 + \frac{a}{x_4} \right) = \frac{1}{2} \left(2.64575 + \frac{7}{2.64575} \right) = 2.64575$$

$$\therefore x_4 = x_3 = 2.64575 \Rightarrow \sqrt{7} \approx 2.64575$$

2- لايجاد الجذور لاي مرتبة (الجذر الثاني والثالث والرابع
.....الخ) نفرض $x = \sqrt[k]{a}$ ومنه ينتج $x^k = a$ اي ان $F(x) = x^k - a$ هي
المعادلة الخطية المستخدمة في الحل ومن ثم نستخدم الصيغة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0$$

or

او بصورة ابسط

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_n + \frac{1}{k} \cdot \frac{a}{x_n^{k-1}}, n \geq 0$$

1- ايجاد المقلوب بدون اجراء عملية القسمة.

نفرض $x = \frac{1}{a}$ ($a > 0$) ومنه ينتج $a = \frac{1}{x}$ اي ان $f(x) = a - \frac{1}{x}$ هي المعادلة الاخطية المستخدمة في الحل ومن ثم نستخدم الصيغة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0$$

or

او بصورة ابسط

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), n \geq 0$$

مثال : جد قيمة $\frac{1}{7}$ باستخدام صيغة نيوتن رافسن علما ان $x_0 = 0.1$

الحل: //

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n) = x_n(2 - 7x_n), n \geq 0$$

$$x_1 = x_0(2 - 7x_0) = 0.1(2 - 7 * 0.1) = 0.13$$

$$x_2 = x_1(2 - 7x_1) = 0.13(2 - 7 * 0.13) = 0.1417$$

$$x_3 = x_2(2 - 7x_2) = 0.1417(2 - 7 * 0.1417) = 0.14285$$

$$x_4 = x_3(2 - 7x_3) = 0.14285(2 - 7 * 0.14285) = 0.14286$$

$$\therefore x_4 = x_3 \Rightarrow \frac{1}{7} \approx 0.14286$$

مثال: جد جذر المعادلة $f(x)=x^3-0.2x-0.2x-1.2=0$ بطريقة نيوتن رافسون. في الفترة $[1,1.5]$.

$$f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0.4x - 0.2$$

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\text{let } x_0 = 1.3 \Rightarrow f(x_0) = f(1.3) = 0.399 \quad \& \quad f'(x_0) = f'(1.3) = 4.35$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.3 - \frac{0.399}{4.35} = 1.20828 \Rightarrow f(x_1) = f(1.20828) = 0.03037 \quad \& \quad f'(1.20828) = 3.69651$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.20828 - \frac{0.03037}{3.69651} = 1.20006 \Rightarrow f(x_2) = f(1.20006) = 0.00022 \quad \& \quad f'(1.20006) = 3.64041$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.20006 - \frac{0.00022}{3.64041} = 1.20000 \Rightarrow f(x_3) = f(1.20000) = 0$$

$$\therefore x_3 = 0$$

تمارين:

1- جد قيمة $x = \sqrt[3]{30}$ باستخدام صيغة نيوتن رافسون علما ان

$$x_0 = 3$$

2- جد جذر المعادلة $x = e^{-x}$ بطريقة نيوتن رافسون. مستخدما

$$x_0 = 0 \quad \text{و} \quad x_0 = 10$$

$$F(x) = x - e^{-x}$$

```
function y=funcnew1(x)
y=x.^2+4.*x+3+sin(x)-x.*cos(x);
```

```
function y=funcnewo2(x)
y=2.*x+4-x.*sin(x);
```

main program-----\

```
x=input('enter starting value')
fx=funcnew1(x)
fprime=funcnewo2(x)
xnext=x-fx/fprime
x=xnext;
fprime=funcnewo2(x)
fx=funcnew1(x)
while input('next
approximation?<enter>=no,1=yes')
xnext=x-fx/fprime
x=xnext;
fx=funcnew1(x)
fprime=funcnewo2(x)
disp(sprintf('next approximation is
x=%9.6f\n',x))
end
disp(sprintf('%9.6\n',x))
```

واجب للطلاب طريقة الامتحان

- 1- حدد المعطيات الدالة $f(x)$, وقيم مثل a, b, ϵ مقدار الخطأ المسموح به
2- احسب c من العلاقة التالية

$$c = b - f(b) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

- 3- إذا كان $|f(c)| < \epsilon$ أطبع قيمة c وتوقف

- 4- ارجع إلى خطوة رقم 2