الفصل السادس(هنا يوجد تصليح انتباه)

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية
(The Numerical Solution of Ordinary Differential Equations)

هنا نتاول بعض الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى والدرجة لاولى والتي تكون بالشكل الاتي:

$$\overline{Y} = f(x, y), y(x0) = y0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

إن هذه الطرق توجد قيمة عدية للدالة غ لقيمة معينة من

أولا:طريقة اويلر(Euler's):

إن صيغة اولير لحل المسالة

$$\mathbf{Y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)}$$

من خلال هذة الصيغة يمكن ايجاد Y_{n+1} والتي تمثل القيمة التقريبية ل y عندما $x=x_{n+1}$ وان $h=x_{n+1}-x_n$

مثال:

استخدم طريقة اولير لحل المسألة :-

$$\overline{Y} = x - y \ , y(0) = 1$$

لقيم x= 0.1, 0.2

الحل:

$X_0=0,\ x_1=0.2,\ h=0.1,\ y_0=1,\ f(x,y)=x-y$

نجد ألان $y(0)=1,\ y(0.2) \approx y2$ من صيغة اويلر:-

$$\mathbf{y_{n+1}=y_n+h\,f(x,y)}$$
$$\mathbf{y_{n+1}=y_n+h(x_n-y_n)}$$

when n=0 $\Longrightarrow$ y_1=?

$$y1 = y0 + h(x0 - y0) = 1 + 0.1(0 - 1) = 0.9 \ \rightarrow\ y(0.1) = y1 = 0.9$$

when n=1 $\Longrightarrow$ y_2=?

$$y2 = y1 + h(x1 - y1) = 0.9 + 0.1(0.1 - 0.9) = 0.82 \rightarrow y(0.2) \approx y2 = 0.82$$

مثال :جد قيمة تقريبة ل y(1.1) من المعادلة التفاضلية

$$\overline{Y} = -y \,,\, y(1) = 2$$

الحل:-

$X_0=1$, $x_1=1.1$, $h=0.1$, $y_0=2$, $f(x,y)= -y$

ألان نجـــــــــــد $y(1.1) \approx y1$ من صيغة اويلر:-

$$yn+1 = yn + h\, f(x, y)$$

$$yn+1 = yn + h(-yn) \ldots yn+1 = yn - hyn$$

when n=0 $\Rightarrow$ **y1=?**

$$y1 = y0 + hy0 = 2 + 0.2(0.1) = 1.8 \rightarrow y(1.1) \approx y1 = 1.8$$

ثانيا:طريقة رو نج-كوتا (Runge –Kutta Method)
طريقة رو نج-كوتا من المرتبة الرابعة

إن صيغة رو نج كوتا من المرتبة الرابعة لحل مسالة (1) هي:

$$Y_{n+1}=y_n+h/6[k_1+2k_2+2k_3+k_4]$$

حيث ان:-

$$K_1=f(x_n,y_n)$$
$$K_2=f(x_n+h/2,y_n+ h/2.k_1)$$
$$K_3=f(x_n +h/2,y_n+ h/2.k_2)$$
$$K_4=f(x_n +h,y_n+h.k_3)$$

مثال :جد قيمة تقريبية ل y(0.1) من المعادلة التفاضلية

$$\overline{Y} = x - y \,,\, y(0) = 1$$

باستخدام طريقة رونج-كوتا من المرتبة الرابعة

الحل:

$X_0=0$, $x_1=0.1$, $h=0.1$, $y_0=1$, $f(x,y)=x-y$

نجد الآن $y_1 \approx y(0.1)$ من صيغة رو نج- كوتا من المرتبة الرابعة:-

$$Y_{n+1}=y_n+h/6[k_1+2k_2+2k_3+k_4]$$

$$K_1=f(x_n,y_n)=x_n-y_n$$

$$K_2=f(x_n+h/2,y_n+h.k_1)= (x_n+h/2)-(y_n+h.k_1)$$

$$K_3=f(x_n +h/2,y_n+h.k_2)= (x_n +h/2)-(y_n+h.k_2)$$

$$K_4=f(x_n +h,y_n+h.k_3)= (x_n +h)-(y_n+h.k_3)$$

when n=0 $\Longrightarrow$ y_1=?

$$K_1= x_n-y_0 =0+1=-1$$

$$K_2=(x_0+h/2)-(y_0+h.k_1)= (0+0.1/2)-(1+0.1/2(-1))=-0.9$$

$$K_3= (x_0 +h/2)-(y_0+h.k_2)= (0+0.1/2)-(1+0.1/2(-0.9))=-0.905$$

$$K_4= (x_0 +h)-(y_0+h.k_3)= (0+0.1)-(1+0.1 (-0.905))$$
$$= - 0.8095$$

$$Y_1=y_0+h/6[k_1+2k_2+2k_3+k_4]=1+0.1/6[-1+2(-0.9)+2(-0.905)-0.8095]$$
$$=0.909675$$