الفصل الثاني

الحلول العددية للمعادلات اللاخطيه

حساب التقريبات الأولية لجذور معادله لا خطية:-

سنعرض أسلوبين لتعين تقر يبات أولية لموقع الجذور الحقيقية معادله $f(x)=0$ حيث ان f دالة مستمرة.

1-تعين مواقع الجذور بالرسم البياني(Graphical Method)

2-تعيين مواقع الجذور بطريقه مبرمجه(Analytical Method):-

تعيين مواقع الجذور بطريقه مبرمجه(Analytical Method):-

تعتمد هذه الطريقه على ملاحظة تغير الاشارات لقيم لدالة في نقاط متعدده $x_1,x_2,\ldots.x_n$ فاذا كانت قيمه $f(x_i)*f(x_i+1)$ سالبة لبعض قيم I فن هناك جذرا بين x_i,x_{i+1} .

مثال :- عين مواقع جذور المعادلة

$$f(x)=x^4-7x^3+3x^2+26x-10=0$$

في الفترة[-8,8].

الحل :\\ اذا اخذنا طول فترة التقسيم hمتساوية الى 4 أي ان h=4 فان اشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يلي:-

x	-8	-4	0	4	8
F(x)	+	+	-	-	+

أي عند اختيار h=4 فانه يوجد جذرين فقط الاول في الفترة (-4,0)والثاني في الفترة(4,8).
أما أذا اخذنا فترة التقسيم اصغر ولتكن 2 أي h=2 فان اشارات الدالة تكون كما يلي:-

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
F(x)	+	+	+	+	-	+	-	+	+

أي عند اختيار h=2 فاننا نحصل على اربع جذور مواقعها في الفترات(-2,0)و(0,2) (2,4)و(4,6).

ملاحظات:-

1-اختيار طول فترة تقسيم صغيرة يؤدي الزيادة في العمليات الحسابية.
2- اختيار طول فترةالتقسيم كبير يؤدي الى قدان بعض الجذور.

اجب عن :
س1عين مواقع الجذور للمعادلات الاتية.

$$1)\ f(x)=x^3-8x^2+7=0,[-3,3]$$
$$2)\ f(x)=x^4-5x^3-3x^2+x+1=0,[-5,5]$$
$$3)\ f(x)=3x^4+2x^3-x^2+x+1=0,[-8,8]$$

طريقة تنصيف الفترات(Bisection Method): -

عندما تكون الدالة $f(x)=0$ مستمرة في الفترة [a,b] وتحقق الشرط $f(a)*f(b)<0$ انه يوجد جذر للمعادلة في الفترة[a,b].
يمكن إيجاد القيمة التقريبية للجذر منتصف الفترة [a,b] بالنقطة c ثم حساب قيمة الدالة بالنقطة c فتوجد ثلاث احتمالات للمقدار f(a)*f(c) وهي :-

الاحتمال الأول:
هوان تكون f(a)*f(c)=0 وهذا يعني إن ا لقيمة c هي جذر للمعادلة.

الاحتمال الثاني:
هوان تكون f(a)*f(c)<0 وهذا يعني ان الجذر يقع في الفترة [a,c].

الاحتمال الثالث:
هوان تكون f(a)*f(c)>0 وهذا يعني ان الجذر يقع في الفترة [c,b].

وبعد تحديد الفترة الحاوية على الجذر يمكن تنصف هذه الفترة مرة أخرى وهكذا يمكن الاستمرار في عملية تنصف الفترة الحاوية على الجذر حتى نحصل لى الجذر المطلوب.

خوارزمية تنصف الفترات

1- المعطيات وهي الفترة[a,b] التي يقع بداخلها الجذر بحيث ان f(a)*f(c)<0 , $\in$ كمية صغيرة جدا وموجبة
2- احسب نقطة المنتصف $c=\frac{a+b}{2}$
3- اذا كان $|f(c)|<\in$ اطبع قيمة c وتوقف
4- اذا كانf(a)*f(c)<0 اجعل b=c والا اجعل a=c

5- ارجع الى لخطوة رقم 2

مثال:
احسب جذر المعادلة $F(x)=\ln x-2x+3=0$ بطريقة تنصف الفترات في الفترة[1,2] وبدقة0.005 = ∊.
الحل:

F(a)=f(1)=1
F(b)=f(2)=-0.307
F(1)*f(2)=1*-0.307=-0.307
يوجد جذر للمعادلة في الفترة [2 ,

$$c=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=1.5$$, F(c)=f(1.5)=0.40547

∴ ليس c جذر للمعادلة اذن توجد فتراتان هما [1,1.5],[1.5,2]

∵ f(1.5)*f(2)<0

الجذر يقع في الفترة [1.5,2]

$$c=\frac{1.5+2}{2}=1.75\Rightarrow f(c)=f(1.75)=0.05962$$

∴ c ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما [1.5,1.75],[1.75,2]

∵ F(1.75)*f(2) < 0

∴ الجذر يقع في الفترة [1.75,2]

$$c=\frac{1.75+2}{2}=1.875\Rightarrow f(c)=f(1.875)=-0.12139$$

∴ c ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما [1.75,1.875],[1.875,2]

∵ F(1.75)*f(1.875) < 0

∴ الجذر يقع في الفترة [1.75,1.875]

$$c=\frac{1.75+1.875}{2}=1.8125\Rightarrow f(c)=f(1.8125)=-0.03029$$

∴ c ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما [1.75,1.8125],[1.8125,1.875]

∵ F(1.75)*f(1.8125) < 0

∴

الجذر يقع في الفترة

[1.75,1.8125]

$$c=\frac{1.75+1.8125}{2}=1.78125 \Rightarrow f(c)=f(1.78125)=0.01482$$

∴ c ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما [1.75,1.78125],[1.78125,1.8125]

∵ F(1.78125)*f(1.8125) < 0

∴ الجذر يقع في الفترة [1.78125,1.8125]

$$c=\frac{1.78125+1.8125}{2}=1.796875 \Rightarrow f(c)=f(1.796875)=-0.0077$$

∴ c ليس جذر للمعادلة اذن توجد فترتان هما [1.78125,1.796875],[1.796875,1.8125]

∵ F(1.78125)*f(1.796875) < 0

∴ الجذر يقع في الفترة [1.78125,1.796875]

$$c=\frac{1.78125+1.796875}{2}=1.7890625 \Rightarrow f(c)=f(1.7890625)=0.0035667$$

∵ $\lfloor f(c)\rfloor=|0.0035667|=0.0035667<0.005$

∴ الجذر هو1.7890625

مثال:- جد جذرا للمعادلة F(x)=lnx+2x+3=0 في الفترة [1,2]

F(a)=f(1)=ln(1)+2.1+3=0+2+3=5>0
F(b)=f(2)=ln(2)+2.2+3=0.69+4+3=7.69>0
F(1).f(2)>0

∴ لا يوجد جذر للمعادلة في الفتره[1,2]

مثال:- جد جذرا للمعادلة
f(x)=x2-36 في الفترة [5,7],

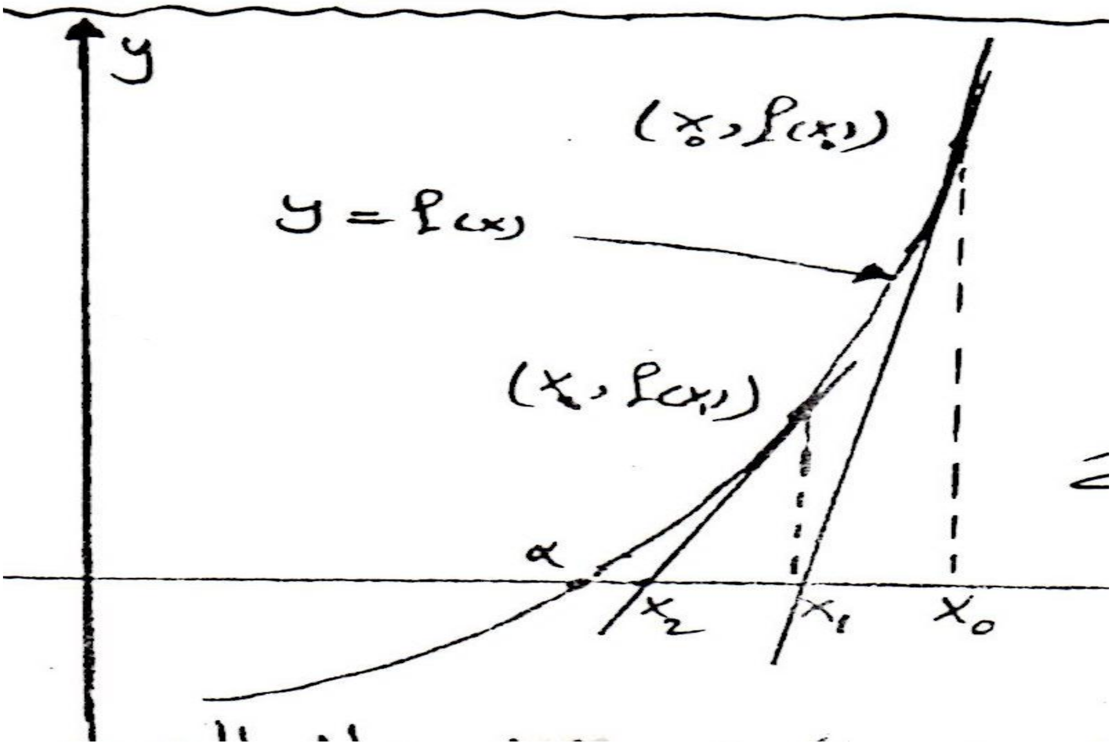
F(5)=-11<0
F(7) =13>0

$$c=\frac{a+b}{2}=\frac{5+7}{2}=6$$

وهو الجذر المضبوط $f(c)=0$

طريقة نيوتن رافسن(Newton-Raphson method):

تستخدم هذه الطريقة لايجاد الحلول التقريبية للمعادلات الاخطية من النوع $f(x)=0$. في هذه الطريقة نستخدم المستقيم المماس لمنحني لدالة $y=f(x)$ في نقطة معينة حيث يشترط وجود قيمة معينة اوية تقريبية $x0$ الحساب متتابعة معينة حيث يشترط وجود قيمة اولية تقريبية للجذر α .
بعد حساب قيمة الدالة $f(x)$ بالنقطة $x0$ نرسم مماس للدالة $y=f(x)$ من النقطة $(x0,f(x0))$ قاطعا محور x بالنقطة $(x1,0)$ حيث تكون تقريب افضل للجذر α من النقطة السابقة $x0$ بعد ذلك نحسب قيمة الدالة $f(x)$ بالنقطة $x1$ نرسم مماس للدالة $y=f(x)$ من النقطة $(x1,f(x1))$ قاطعا محور x بالنقطة $(x2,0)$ حيث تكون تقريب افضل للجذر α من النقطة السابقة $x1$ وهكذا نستمر الى ان نصل لى القيمة المطلوبة للجذر.



ان الصيغة العامة لطريقة نيوتن رافسون هي:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad ,n \geq 0$$

حيث $f'(x)$ المشتقة

الدالة$f(x)$, بالنقطة x0 بحيث $f'(x) \neq 0$

ملاحظاتك

1- في هذه الطريقة يشترط وجود قيمة اولية تقريبية للجذر α والتي هي x0

2- في حالة اعطاء فترة معينة مثل[a,b] في السؤال يجب ان تكن الدالة معرفة ومستمرة في تللك الفترة بحيث ان

f(a)*f(b)<0

عندها يتم اختيار x0 أي قيمة داخل الفترة

3- في حالة عدم اعطاء قيمة x0 في السؤال ,يجب اولا استخراج الفترة التي يوجد بها الجذر باستخدام الطريقةالمبرمجة ثم يتم اختيار x0 أي قيمة داخل تلك الفترة

4- 4- كلما كانت x0قريبة من الجذر كلما كانالاقتراب الى الجذر اسرع

5- ايقاف الحسابات التكرارية عندما يتحقق الشرط الاتي

$$|x_n - x_{n-1})| < \in \; or \;\; |f(x_{n+1})| \le \in$$

حيث $\in$ مقدار صغير يمثل الخطأ المسموح به

خوارزمية نيوتن رافسن

1- حدد المعطيات الدالة $f(x)$, المشتقة$f'(x)$, x0 قيم تقريبية اولية للجذر, $\in$ مقدار الخطأ المسموح به

2-احسب xnمن العلاقة التالية

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'\iota(x_{n-1})} \quad , n = 1,2,3,\ldots\ldots.n$$

3- إذا كان $|x_n - x_{n-1})| < \in$ **أطبع قيمة x_n وتوقف**

4-ارجع إلى لخطوة رقم 2 .

مثال:جد حذ المعادلة $f(x)=x^2+2.1x-1=0$ بطريقة نيوتن رافسونعلما على ان تكون النتائج صحيحة خمسة مراتب عشرية مستخدما $x_0=0.5$.

الحل:\\

$$f(x)=x^2+2.1x-1 \Rightarrow f(0.5)=0.3$$

$$f'(x)=2x+2.1 \Rightarrow f'(0.5)=3.1$$

$$\therefore x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=05-\frac{0.3}{3.1}=0.40323$$

$$x_1=0.40323 \Rightarrow f(x_1)=f(0.40323)=0.00938 \;\; \& \; f'(x_1)=f'(0.40323)=2.90646$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0.40323-\frac{0.00938}{2.90646}=0.40000$$

$$\therefore x_2=0.4000=0.4 \Rightarrow f(x_2)=f(0.4)=0 \;\&\; f'(x_2)=f'(0.4)=2.9$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=0.4-\frac{0}{2.9}=0.4$$

$$\therefore x_3=x_2=0.4$$

$$\because |x_3-x_2|=|0.4-0.4|=0 \le \in$$

اذن $x_3=0.4$ هو جذر المعادلة

ملاحظات:\\

1- يمكن استخدام صيغة نيوت رافسن لايجاد الجذر التربيعي لاي عدد $a>0$ وكلاتي:-

نفرض $x=\sqrt{a}$ ومنه ينتج $x^2=a$ اي ان $F(x)=x^2-a$ هي المعادلة الخطية المستخدمة في الحل ومن ثم نستخدم الصيغة

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ,n\ge 0$$

or

او بصورة ابسط

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\; n\ge 0$$

مثال : استخدم صيغة نيوتن رافسن لايجاد الجذر التربيعي للعدد 7 مستخدما $x_0=2.5$.

الحل لايجاد المعادلة تكون كلاتي:-

نفرض $x=\sqrt{7}$ ومنه ينتج $x^2=7$ اي ان $F(x)=x^2-7=0$ هي المعادلة الخطية المستخدمة في الحل ومن ثم نستخدم الصيغة

F'(x)=2x

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\ n\geq 0$$

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)=\frac{1}{2}\left(2.5+\frac{7}{2.5}\right)=2.65$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)=\frac{1}{2}\left(2.65+\frac{7}{2.65}\right)=2.64576$$

$$x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)=\frac{1}{2}\left(2.64576+\frac{7}{2.64576}\right)=2.64575$$

$$x_4=\frac{1}{2}\left(x_4+\frac{a}{x_4}\right)=\frac{1}{2}\left(2.64575+\frac{7}{2.64575}\right)=2.64575$$

$$\therefore\ x_4=x_3=2.64575\Rightarrow\sqrt{7}\ \approx 2.64575$$

2- لايجادالجذورلاي مرتبة (الجذر الثاني والثالث والرابع ......الخ) نفرض $x=\sqrt[k]{a}$ ومنه ينتج $x^k=a$ اي ان $F(x)=x^k-a$ هي المعادلة الخطية المستخدمة في الحل ومن ثم نستخدم الصيغة

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad ,n\geq 0$$

or

او بصورة ابسط

$$x_{n+1}=(1-\frac{1}{k})\ x_n+\frac{1}{k}\cdot\frac{a}{x_n^{k-1}}\qquad ,\ n\geq 0$$

1-ايجاد المقلوب بدون اجراء عملية القسمة.

نفرض $x=\frac{1}{a}$ (a>0) ومنه ينتج $a=\frac{1}{x}$ اي ان $f(x)=a-\frac{1}{x}$ هي المعادلة الاخطية المستخدمة في الحل ومن ثم نستخدم الصيغة

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ,n\geq 0$$

او بصورة ابسط

or

$$x_{n+1}=x_n(2-ax_n) \quad , n\geq 0$$

مثال : جد قيمة $\frac{1}{7}$ باستخدم صيغة نيوتن رافسن علما ان x$_0$=0.1 .

الحل:\\

$$x_{n+1}=x_n(2-ax_n)=x_n(2-7x_n) \text{ , } n\geq 0$$
$$x_1=x_0(2-7x_0)=0.1(2-7*0.1)=0.13$$
$$x_2=x_2(2-7x_1)=0.1(2-7*0.13)=0.1417$$
$$x_3=x_2(2-7x_2)=0.1417(2-7*0.1417)=0.14285$$
$$x_4=x_3(2-7x_3)=0.14285(2-7*0.14285)=0.14286$$
$$\therefore\ x_4=x_3\Rightarrow\frac{1}{7}\approx 0.14286$$

مثال:جد جذر المعادلة $f(x)=x^3-0.2x-0.2x-1.2=0$
بطريقة نيوتن رافسون. في الفترة [1,1.5].

$$f(x)=x^3-0.2x^2-1$$
$$f'(x)=3x^2-0.4x-0.2$$
$$\therefore x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ,n\geq 0$$
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$let \quad x_0=1.3 \ \Rightarrow f(x_0)=f(1.3)=0.399 \quad \& \quad f'(x_0)=f'(1.3)=4.35$$
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1.3-\frac{0.399}{4.35}=1.20828 \ \Rightarrow f(x_1)= \ f(1.20828)=0.03037 \ \& \quad f'(1.20828)=3.69651$$
$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.20828-\frac{0.03037}{3.69651}=1.20006 \ \Rightarrow f(x_2)= \ f(1.20006)=0.00022 \ \& \ f'(1.20006)=3.64041$$
$$x_3=x_12-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1.20006-\frac{0.00022}{3.64041}=1.20000 \ \Rightarrow f(x_3)= \ f(1.20000)=0$$
$$\therefore x_3=0$$

تمارين:

1- جد قيمة $x=\sqrt[3]{30}$ باستخدم صيغة نيوتن رافسن علما ان $x_0=3$

2- :جد جذر المعادلة $x=e^{-x}$ بطريقة نيوتن رافسون. مستخدما $x_0=0$ و $x_0=10$

$F(x)=x-e^{-x}$

```
function y=funcnewo1(x)
y=x.^2+4.*x+3+sin(x)-x.*cos(x);
```

```
function y=funcnewo2(x)
y=2.*x+4-x.*sin(x);
```

main program----ا

```
x=input('enter starting value')
fx=funcnewo1(x)
fprime=funcnewo2(x)
xnext=x-fx/fprime
x=xnext;
fprime=funcnewo2(x)
 fx=funcnewo1(x)
 while input('next
approxmation?<enter>=no,1=yes')
  xnext=x-fx/fprime
x=xnext;
  fx=funcnewo1(x)
fprime=funcnewo2(x)
disp(sprintf('next approximation is
x=%9.6f\n',x))
 end
 disp(sprintf('%9.6\n',x))
```

واجب للطلاب طريقة الامتحان

1- حدد المعطيات الدالة f(x), وقيم مثل a,b,$\in$ مقدار الخطأ المسموح به
2-احسب c من العلاقة التالية

$$c = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

3- إذا كان $|f(c)| \prec \in$ أطبع قيمة c وتوقف

4-ارجع إلى لخطوة رقم 2