اذا كان السؤال حاصل ضرب دالتين عندها نتبع القوانين التالية

1. **اولا الاسس فردية عندها نفك الاس الفردي الاقل مرتبة ونحل حسب القوانين الفردية**

EXAMPLE : $\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^5 x \, dx$

$= \int (1-\cos^2 x) \sin x \cos^5 x \, dx$

$= \int (\sin x \cos^5 x - \cos^7 x \sin x) \, dx$

$= \int \cos^5 \sin x - \int \cos^7 x \sin x \, dx$

$= -\dfrac{\cos^6 x}{6} + \dfrac{\cos^8 x}{8} + c$

2. **اذا كان احد الاس فردي والاخر زوجي عندها نفك الاس الفردي حسب القوانين الفردية**

EXAMPLE : $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x \cos^2 x \, dx$

$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \cos^2 x \, dx$

$= \int (1-2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \cos^2 x \, dx$

$= \int \sin x \cos^2 x \, dx - \int 2\cos^4 x \sin x \, dx + \int \cos^6 x \sin x \, dx$

$= -\dfrac{\cos^3 x}{3} + 2\dfrac{\cos^5 x}{5} - \dfrac{\cos^7 x}{7} + c$

اذا كان السؤال حاصل ضرب دالتين والزوايا مختلفة عندها نستخدم القوانين التالية

$\int \sin mx \sin nx \, dx$ $\qquad \int \sin mx \cos nx \, dx$ $\qquad \int \cos mx \cos nx \, dx$

1. $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\cos(m-n)x - \frac{1}{2}\cos(m+n)x$
2. $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\sin(m-n)x + \frac{1}{2}\sin(m+n)x$

3. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\cos(m-n)x + \frac{1}{2}\cos(m+n)x$

Evaluate

1. $\int \sin 7x \cos x \; dx$

$$= \int \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 8x) \; dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos 6x}{6} - \frac{1}{2}\frac{\cos 8x}{8} + c$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 8x + c$$

2. $\int \sin 7x \cos 3x \, dx$

$$= \int \tfrac{1}{2}\sin(7-3)x \, dx + \int \tfrac{1}{2}\sin(7+3)x \, dx$$

$$= \int \tfrac{1}{2}\sin 4x \, dx + \int \tfrac{1}{2}\sin 10x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos 4x}{4} + \frac{1}{2}\frac{(-\cos 10x)}{10} + c$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + c$$

3. $\int \cos 2x \cos 3x \, dx$

$$= \int \tfrac{1}{2}(\cos(3-2)x + \cos(3+2)x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 5x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\frac{\sin 5x}{5} + c$$

ثانيا تكاملات

Integral $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ and $\csc x$

- **اولا تكاملات مباشرة**

1. If $y = \tan u \;\rightarrow\; y' = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$

$$\boxed{\int \sec^2 u\,du = \tan u + c}$$

2. If $y = \cot u \;\rightarrow\; y' = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

$$\boxed{\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c}$$

3. If $y = \sec u \;\rightarrow\; y' = \sec u \tan u \dfrac{du}{dx}$

$$\boxed{\int \sec u \tan u\; du = \sec u + c}$$

4. If $y = \csc u \;\rightarrow\; y' = -\csc u\, \cot u \dfrac{du}{dx}$

$$\boxed{\int \csc u \cot u\; du = -\csc u + c}$$

- ثانيا اذا كانت الدالة اسية المشتقة متوفرة عندها نستخدم القونين التالية

$$\boxed{\int \tan^n au \sec^2 au\,du = \frac{\tan^{n+1} au}{(n+1)a} + c}$$

$$\boxed{\int \cot^n au \csc^2 au\,du = -\frac{\cot^{n+1} au}{(n+1)a} + c}$$

$$\boxed{\int \sec^n au \sec au \tan au\,du = \frac{\sec^{n+1} au}{(n+1)a} + c}$$

$$\boxed{\int \csc^n au \csc au \cot au\, du = -\frac{\csc^{n+1} au}{(n+1)a} + c}$$

EXAMPLES:

Find the following integral

1) $\int \tan x \sec^2 x\, dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$

2) $\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx = \frac{\tan^3 x}{3} + c$

3) $\int \tan^7 x \sec^2 x\, dx = \frac{\tan^8 x}{8} + c$

4) $\int \frac{\sqrt{\tan x - 1}}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(\tan x - 1)^{1/2}}{\cos^2 x} dx$

$= \int (\tan x - 1)^{1/2} \sec^2 x\, dx$

$= \frac{(\tan x - 1)^{3/2} x}{3/2} + c$

ـ   ثالثا اذا كانت الدالة اسية المشتقة غيرمتوفرة عندها نستخدم القونين التالية

$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

EXAMPLE 1: $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + c$$

EXAMPLE 2: $\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx$

$$= \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \tan^2 x\ \sec^2 x\, dx$$

$$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$$