Hyperbolic Functions

(1) If $y = \sinh u$ $\quad y' = \cosh u \dfrac{du}{dx}$

$y = \cosh u$ $\quad y' = \sinh u \dfrac{du}{dx}$

$y = \tanh u$ $\quad y' = \sec h^2 u \dfrac{du}{dx}$

1. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$

2. $\int \cosh x\,dx = \sinh u + c$

3. $\int \sec h^2 x\,dx = \tanh x + c$

اذا كانت مشتقة الاس متوفرة نستخدم القوانين التالية

(2) $\int \sinh^n ax \cosh ax\ dx = \dfrac{\sinh^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(3) $\int \cosh^n ax \sinh ax\ dx = \dfrac{\cosh^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(4) If $\int \sinh^n x\ dx$ or $\int \cosh^n x\ dx$

اذا كانت الدالة اسية والمشتقة غير متوفرة وكان الاس عدد زوجي

Case 1: if n is even, we use identity $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$, $\sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$

اذا كانت الدالة اسية والمشتقة غير متوفرة وكان الاس عدد فردي

Case 2: if n is odd, we use identity $\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1$, $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$

معكوس الدوال الزائدية

(5) If $y = \sinh^{-1} u \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \dfrac{du}{dx}$

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\frac{u}{a} + c}$$

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + c}$$

(6) If $y = \tanh^{-1} u \quad \rightarrow y' = \dfrac{1}{1-u^2} \dfrac{du}{dx}$

$$\boxed{\int \frac{1}{a^2-u^2}\, du = \frac{1}{a}\tanh^{-1} u + c}$$

EXAMPLES: $\int \sinh^3 x\, dx$

$$= \int \sinh^2 x \sinh x\, dx$$

$$= \int (\cosh^2 x - 1) \sinh x\, dx$$

$$= \int \cosh^2 x \sinh x\, dx - \int \sinh x\, dx$$

$$= \frac{\cosh^3 x}{3} - \cosh x + c$$

H.W **Ex 1:** $\int \cosh^4 2x\, dx$

H.W **Ex 2:** $\int \dfrac{x\, dx}{1-x^4}$

H.W **Ex 3:** $\int \dfrac{x dx}{\sqrt{x^4-1}}$

H.W **Ex 4:** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$

EXAMPLE: $\int e^x \sinh 2x\, dx$

Sol:

$$= \int e^x \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right) dx \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \int \frac{e^{3x} - e^{-x}}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{3x}\, dx - \frac{1}{2}\int e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{3} e^{3x}\, 3dx + \frac{1}{2}\int e^{-x}(-dx)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}e^{3x} + e^{-x}\right] + c$$

EXAMPLE: $\int \cosh(\ln \cos x)\, dx$

Sol:

$$= \int \frac{e^{\ln\cos x} + e^{-\ln\cos x}}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{\ln\cos x} + e^{-\ln\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos x + \sec x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

EXAMPLE: $\int \cosh(\ln x)\frac{dx}{x} = \sinh(\ln x) + c$

EXAMPLE: $\int \sinh(2x+1)\, dx = \frac{1}{2}\int \sinh(2x+1)\ 2dx$

$$= \frac{1}{2}\cosh(2x+1) + c$$