1. Integration by parts

التكامل بالتجزئة

تبنى هذه الطريقة على قاعدة مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$d(u\,v) = udv + vdu$$

$$udv = d(u\,v) - vdu$$

$$\boxed{\int udv = u\,v - \int vdu}$$

نلجا الى هذه الطريقة اذا لم نتمكن من الحل بالطرق السابقة وتمكنا من تجزئة السؤال الى جزئين احدهما قابل للتكامل والاخر قابل للاشتقاق. حيث يجب ان نحصل على $\int udv = u\,v - \int vdu$ الذي يفترض ان يكون ابسط من صيغة التكامل الاول في السؤال.

كيفية يتم اختيار dv , u

1. **الحالة الاولى** : اذا كان السؤال يحتوي على

1. Ln
2. invers

والمشتقة غير متوفرة عندها نختار u $\begin{smallmatrix}\text{ln}\\ \text{invers}\end{smallmatrix}$ ثم نشتقها والباقي يكامل

Find the integration
Evaluate

EXAMPLE 1: $\int x \ln x \, dx$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx \qquad dv = x\,dx \qquad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int udv = u\,v - \int vdu$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

EXAMPLE 2: $\int \ln x \, dx$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x} \qquad dv = dx \qquad v = x$$

$$\int u dv = u v - \int v du$$

$$= x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$

$$= x \ln x - x + c$$

EXAMPLE 3: $\int x \cos x \, dx$

$$u = x \qquad du = dx \qquad dv = \cos x dx \qquad v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int u dv = u v - \int v du$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

EXAMPLE 4: $\int \sin^{-1} x \, dx$

$$u = \sin^{-1} x \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad dv = dx \qquad v = x$$

$$\int u dv = u v - \int v du$$

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= x \sin^{-1} x - \int x \, (1 - x^2)^{-1/2} dx$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int -2x \, (1 - x^2)^{-1/2} dx$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \frac{(1 - x^2)^{1/2}}{1/2} + c$$

EXAMPLE 5: $\int \tan^{-1} x\,dx$

$$u=\tan^{-1}x \qquad du=\frac{dx}{1+x^2} \qquad dv=dx \qquad v=x$$

$$\int u\,dv = u\,v-\int v\,du$$

$$=x\tan^{-1}x-\int x\,\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+c$$

2. اذا لم تحتوي الدالة على $\ln$ او دالة معكوسة نختار الدالة التي اذا تم اشتقاقها لعدة مرات الى ان تصل الى الصفر هي u اما الباقي فهي dv

EXAMPLE 1: $\int x\,e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

EXAMPLE 1: $\int x\,e^{x}dx$

$$u=x \qquad du=dx \qquad dv=e^x\,dx \qquad v=e^x$$

$$\int u\,dv = u\,v-\int v\,du$$

$$=x\,e^x-\int e^x dx$$

$$=x\,e^x-e^x+c$$

H.W

1. $\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+c$

2. $\int x\sin^2 x\,dx$

1. طريقة الجدول: اذا لم تحتوي على $\ln$ و invers وهنالك دالة تحتاج الى عدد من الاشتقاقات لكي تصل الى الصفر

EXAMPLE 1: $\int x\cos x\,dx$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

الاشتقاق المتكرر	التكامل المتكرر
x	$\cos x$
1	$\sin x$
0	$-\cos x$

EXAMPLE 2: $\int x^3 e^x\,dx$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\,e^x - 6e^x + c$$

u	dv
x^3	e^x
$3x^2$	e^x
$6x$	e^x
6	e^x
0	e^x

EXAMPLE 3: $\int x^3 e^{2x}\,dx$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2 e^{2x} + \tfrac{6}{8}x\,e^{2x} - \tfrac{6}{16}e^{x} + c$$

u	dv
x^3	e^{2x}
$3x^2$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$6x$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
6	$\frac{1}{8}e^{2x}$
0	$\frac{1}{16}e^{2x}$

EXAMPLE 4: $\int xe^x\,dx$

$$= xe^x - e^x + c$$

u	dv
x	e^x
1	e^x
0	e^x