الاحتمالات

يرتبط مفهوم الاحتمال ارتباطا وثيقا بمفهومين اساسين هما الاختبار (او التجربة -فضاء العينة) والحادث . وعليه ضرورة تحديد هذين المفهومين تحديدا دقيقا . فلو اننا سحبنا شيئا من مجموعة او قمنا بقياس سرعة السيارات المارة في شارع ما فاننا نقوم في هذه الحالات قد قمنا باختبار او تجربة . وحساب الاحتمالات يعطي الاختبار مفهوم اوسع واشمل واعم . الا اننا غالبا ما نصب اهتمامنا على دراسة جزء من نتيجة تجربة او الاختبار فناخذ مثلا للنتيجة كلها .

-1فضاء العينة : sample space هي المجموعة التي عناصرها جميع النتائج الممكنة للتجربة او الاختبار وتسمى ايضا المجموعة الاساسية للاحتمالات ويرمز لها مثلا الرمز. F

مثال : اذا القينا قطعة نقود مرة واحدة فان فضاء العينة يكون:

F=(p, T) 00

حيث p صورة و T الكتابة

-2الحادث : Event هو مجموعة جزئية من فضاء العينة لتجربة ما اي انه مجموعة محددة من من الحوادث الابتدائية التي تنتمي لفضاء العينة .

ففي المثال السابق يمثل الحصول على الوجه P حادثا وكذلك الحصول على الوجه الاخر . T

انواع الاحداث

تقسم احداث الى-:

-1الاحداث المستقلةIndependent event :

هي الاحداث التي تحدث مستقلة عن الاحداث الاخرى او هي كل حدث يحدث بمعزل عن الحدث الاخر . فمثلا عند رمي قطعة نقود مرتين فان حادثة ظهور الصورة في الرمية الاولى لاتؤثر (مستقلة) على ظهور صورة الكتابة في الرمية الثانية.

-2الاحداث المتنافيةMultyually exclusive :

هي حديثين احدهما ينفي الاخر ، اي لايمكن ان يحدثا سوية في نفس الوقت. مثلا عند رمي قطعة النقود فان نتيجة الرمية هي اما صورة او كتابة ولايمكن ظهور الاثنين معا لنفس القطعة .

-3الاحداث ذات الفرص المتساويةEqually Likely event : يقال ان النتائج الممكنة

لمحالوة تمتلك نفس الفرصة (فرصة متساوية) اذا لم يكن هنالك سبب لتفضيل نتيجة على اخرى . فمثلا عند رمي قطعة النقود عشوائيا فان للصورة او الكتابة نفس الفرصة في الظهور.

-4الاحداث المعتمدةDependent events

اذا كان وقوع حادثة معينة يؤثر في وقوع حادثة اخرى (اومجموعة حوادث اخرى) عندئذ يقال ان هاتان الحادثتان معتمدتان . على سبيل المثال فان درجة الحرارة في احد الايام الاسبوع تتاثر بدرجة حرارة اليوم السابق له او الايام السابقة له.

-5الحالات الكلية (الممكنةExhaustive cases)

ان العدد الكلي للنتائج الممكنة في اية محاولة يدعى بالحالات الكلية . فعند رمي قطعة نقود يلاحظ ان النائج الكلية (الممكنة) لهذة المحاولة هي) صورة ، كتابة) ولايوجد غيرهما .

ومثال اخر هو درجة الطالب في الامتحان فالحالات الكلية للدرجة التي يمكن ان يحصل عليها الطالب في الامتحان تتاروح بين الصفر و ١٠٠ فلا يمكن ان يحصل الطالب اقل من الصفر او اكثر من ١٠٠.

-6الحالات الممكنة لوقوع لحادثة معينة Favourable cases

ان العددد الكلي للحالات التي تشترك بصفة معينة او ميزة معينة في اية محاولة يمثل عدد نتائج تلك المحاولة الممكنة لوقوع حادثة . على سبيل المثال عند رمي زهري نرد فان عدد الحالات الممكنة التي تشترك بصفة ان كون مجموع النقاط مساو الى ٥ هو اربعة حالات ووهي

(٤، ١) (٤ ، ١) (٣ ، ٢) (٣ ، ٢)

بعض من قوانين الاحتمالSome laws of Probability :

-1قانون الجمع للاحداث المتنافية: اذا كان هناك حديثين متنافين فاحتمال الحصول على اي منهما يساوي حاصل جمع احتمال الحصول على كل منها على انفراد . انظر الشكل المرفق.

مثال : اذا كانت لدينا تجربة لها احتمالان هما ام A او B ماهو احتمال الحصول على A) ، (B

P(A or B)= p(A)+P(B) 1

-2قانون الضرب للاحداث المستقلة: وهو خاص بالاحداث المستقلة اذا كانت لدينا حديثن مستقلين فاحتمال الحصول على كلا الحدثين يساوي حاصل ضرب حصول كل من الحدثين على

انفراد.

اي ان:

$$P(A \text{ or } B)= p(A)XP(B) \text{ .... } 2$$

بعض من قوانين الاحتمال -1 قانون الجمع للاحداث غير المتنافية : يعتبر الحدثان A و B غير متنافين اذا كان وقوع A لايحجب وقوع B والعكس بالعكس فيكون

$$P(A , B) = P(A) +P (B) -P(A ,B) \text{ ...}1$$

وتطرح قيمة P(A ,B)حتى نتجنب من حسابها مرتين .

-2قانون الضرب للاحداث غير المستقلة : يعتبر الحدثان غير مستقلين اذا كان وقوع احدهما مرتبطا بطريقة ما بوقوع الاخر . عندئذ يكون:

$$P(A , B) = P(A) *P (B) -P(A / B) \text{ ...}2$$

ويقرا هذا القانون كلاتي ((احتمال وقوع كل من الحدثين A و B يساوي احتمال وقوع الحدث Aمضروبا في احتمال وقوع الحدث B اذا علم ان الحدث A قد وقع فعلا ((

امثلة عملية على قوانين الاحتمال

اولا : عندما تكون الاحداث متنافية

مثال : سحبت قطرة دم من شخص يرغب فحص دمه . ماهو احتمال ان دم هذا الشخص من صنف غير الصنف O ؟

الحل

ان احتمال ان يكون دم هذا الشخص من صنف غير الصنف O هو:

بما ان اصناف الدم هي اما A او B او AB او O اذن

$$P (A \text{ or } B \text{ or } AB)= P((A)+P(B)+P(AB)\text{.........}1$$

$$P (A \text{ or } B \text{ or } AB)= 1/4 +1/4+1/4 = 3/4 = 0.75$$

او بطريقة اخرى وبما ان مجموع الحالات الممكنة يساوي ١ فان احتمال O يكون

$$P(O) = 1-(1/4) = 3/4 = 0.75$$

ثانيا : عندما تكون الحواث غير متنافية:

مثال : اذا علمت ان احتمال سقوط المطر في احد ايام الربيع هو ٠.٥٢ وان احتمال كون الطقس مشمس هو ٠.٣٦ وان احتمال كون الطقس مشمس وممطر في ان واحد هو0.18 ، ماهو احتمال ان يكون الطقس مشمس او ممطر.

الحل:

نفرض ان E1 تمثل حادثة سقوط المطر هذا اليوم . وان E2 تمثل حالة الطقس مشمس في هذا اليوم . عندئذ يكون:

$$P(E1 \text{ or } E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1E2) \; ......1$$

$$P(E1 \text{ or } E2) = 0.52+0.36 -0.18 = 0.70$$

امثلة عملية على قوانين الاحتمال

ثالثا : عندما تكون الاحداث مستقلة

مثال : في وجبة انتاج مؤلفة من ١٢ وحدة توجد ٤ وحدات معيبة . فاذا علمت انه تم سحب ٣ وحدات من هذه الوجبة عشوائيا الواحدة تلو الاخرى . ماهو احتمال ان تكون هذه الوحدات الثلاثة:

أ- جيدة ، ب-معيبة

الحل :

واضح ان عدد الوحدات الجيدة هو ٨ وعليه فان:

أ- احتمال سحب الوحدة الاولى وهي جيدة يكون$P(E1)=8/12$

احتمال سحب الوحدة الثانية وهي جيدة يكون$P(E2)=7/11$

احتمال سحب الوحدة الثالثة وهي جيدة يكون$P(E3)=6/10$

وحيث ان الحوادث مستقلة فان احتمال ان تكون الوحدات الثلاث المسحوبة بحالة جيدة هو:

$$P(E1 \text{ or } E2 \text{ or } E3) = 8/12 * 7/11 * 6/10 = 0.255$$

ب-احتمال سحب الوحدة الاولى وهي معيبة يكون$P(E1)=4/12$

احتمال سحب الوحدة الثانية وهي معيبة يكون$P(E2)=3/11$

احتمال سحب الوحدة الثالثة وهي معيبة يكون$P(E3)=2/10$

وعليه فان احتمال ان تكون الوحدات الثلاثة المسحوبة معيبة هو

$$P(E1 \text{ or } E2 \text{ or } E3) = 4/12 * 3/11 * 2/10 = 0.018$$

رابعا : عندما تكون (الاحتمالات الشرطية)الحواث المشروطةconditional event

مقدمة عن الاحتمالات الشرطية:

لتكن E1 حادثة محاولة معينة وان E2 حاثة اخرى وقوعها مشروط بوقوع الحادثة . E1 عندئذ فاناحتمال وقوع الحادثتين في ان واحد مساؤ لحاصل ضرب احتمال وقوع E1 في احتمال وقوع E2 المشورطة بوقوع . E1 ويرمز للاحتمال قوع E2 المشروطة بوقوع E1 بالشكل الاتي:

$$P(E2/E1) \quad .....1$$

وستكون:

$$P(E1 \text{ or } E2) = P(E1,E2) = P(E1) * P(E2/E1) \quad ....2$$

وهذا يعني ان:

$$P(E2/E1) = P(E1,E2) / p(E1) \quad ...3$$

وكذلك فان:

$$P(E1/E2) = P(E1,E2) / p(E2) \quad ...4$$

وبذلك فان:

$$P(E1,E2)=P(E1)*P(E2/E1) =P(E2)* P(E1)/E2) \quad ....5$$

وكذلك نلاحظ انه اذا كانت E1 مستقلة عن E2 فان:

$$P(E1,E2) = P(E1) * P(E2) \quad ....6$$

وهذا يعني ان:

$$P(E2/E1) = P(E2) * P(E1/E2) = P(E1) \quad ....7$$

مثال : لوحظ في احد المصانع ان ان ٩٥% من الوحدات المنتجة هي بحالة جيدة . ومن بين كل ١٠٠ وحدة جيدة هنالك ٧٠ اكثر جودة . اختيرات وحدة واحدة من انتاج احدى الوجبات عشوائيا . ماهو احتمال ان تكون هذه الوحدة من الواحدات الاكثر جودة. الحل:

نفرض ان E1 تمثل حالة الانتاج كونه جيد ، وان E2 تمثل حالة الانناج كونه اكثر جودة. نلاحظ هنا انه حتى تكون الوحدة المختارة بحالة اكثر جودة يشترط ان تكون مصنفة ضمن الوحدات الجيدة . وهذا يعني الاحتمال المطلوب هو E1 و E2 وعليه فان:

احتمال ان الوحدة المختارة تكون هي بحالة جيدة هو P(E1)=0.95 وان احتمال ان تكون الوحدة المختارة هي اكثر جودة علما انها بحالة جيدة هو

$$P(E2/E1) = 0.7$$

وعليه فان:

$$P(E1 \text{ and } E2) = P(E1) * P(E2/E1) \quad ....1$$

$$P(E1 \text{ and } E2) = 0.95 * 0.7 = 0.665$$