الاقتصاد القياسي

النموذج الخطي لمتغيرين: الانحدار البســـيط

1.2 مقدمه

2.2 تحديد العلاقة.

3.2 تقدير نموذج الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى

4.2 خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية (م ص ع)

5.2 فترات الثقة Confidence Interval

6.2 اختبار الفرضيات

7.2 تحليل التباين لمعادلة الانحدارANOVA

8.2 التبنوء مع نموذج الانحدار البسيط.

9.2 ملخص

تمارين.

1.2 مقدمه:

تحليل الانحدار من أكثر الأدوات المستعملة في التحليل القياسي لذا سوف نبدأ بتحديد الخطوط العريضة لتحليل الانحدار. بينما في الفصول التاليه سوف تتعامل مع التعديلات وتوسيع للأساليب الاساسيه اللازمة في تحليل البيانات الاقتصاد يه.

نبدأ بالسؤال الأساسي: ما هو تحليل الانحدار؟ تحليل الانحدار يهتم بوصف وتقييم العلاقة بين متغير (عادة يسمى المتغير التابع) وواحد آو اكثر لمتغيرات أخرى (تسمى عادة المتغيرات المفسرة آو المتغيرات المستقلة) ويرمز للمتغير المفسر بـ y والمتغيرات المفسرة بـ x_2 x_3 . $x_n \ldots x_1$

التفسير الحرفي لكلمة انحدار تعني" ارتداد أو انكفاء أو رجوع" في الحقيقة تحليل الانحدار لا يربطه بهذا المعنى أي رابط.

كلمة انحدار استخدمت من قبل سير فرنسيس جالتون (1982-1911) Sir Francis Galton من إنجلترا. والذي كان يدرس العلاقة بين طول الأبناء وطول الآباء والذي لاحظ جالتون أن الطول يميل إلى المعدل مع أن الآباء الطوال يكون أبنائهم طوال والآباء القصار يميل أبنائهم لان يكونوا قصار أي أن هناك ميل عند ألأبناء للمعدل أي أن هناك انحدار نحو المعدل.في دراسات أخرى مشابهه تحصل على نفس النتيجة التي تحصل عليها جالتون.

بالعودة إلى الرموز التي استخدمناها حيث رمزنا للمتغير المفسَر بـ y والمتغيرات المفسرة بـ x_3 x_1 $x_2 \ldots x_n$. إذا كانت $k=1$ ، أي إن هناك متغير مستقل واحد فقط من المتغيرات المفسرة. أي ان هناك x واحدة فقط. يعرف هذا بالانحدار البسيط. وهو ما سوف يتم مناقشته في هذا الفصل. إذا كانت $k>2$ ، آي أن هناك اكثر من x واحد و متغير مستقل. نحصل على ما يعرف بالانحدار المتعدد. والذي سوف نناقشه في الفصل القادم.

مثال 1 : الانحدار البسـيط.

y = المبيعات

x = النفقات الاعلانيه.

حيث يتم تحديد العلاقة بين المبيعات والنفقات الأعلانيه.

مثال 2: الانحدار المتعدد.

Y = استهلاك ألا سره.

X_1 = دخل ألا سره.

X_2 = الأصول المالية للاسره

X_3 = حجم ألا سره

تحديد العلاقة بين نفقات استهلاك ألا سره من جهة والدخل، والأصول المالية و حجم ألا سره من جهة اخرى.

هناك عدة أسباب لدراسة هذه العلاقات. يمكن استخدام ذلك في :

1- تحليل تأثير بعض السياسات التي تتضمن تغير قيم لفرد معين. في المثال الأول نستطيع أن نحلل تأثير النفقات الاعلانيه على كمية المبيعات.

2- التنبؤ بقيم Y من قيم X.

3- اختبار مدى معنوية العلاقة بين آي من X و Y.

في مناقشتنا نفرق بين المتغيرY و المتغيرات X. افترضنا أن المتغيرات X هي المتغير الذي يؤثر على المتغير Y. هناك العديد من المصطلحات التي نطلقها على Y , X توجد في الجدول 1.3 .

جدول 3: مصطلحات المتغير التابع و المتغير المستقل.

X	Y
1-مًتنبأ	متَنبأ به
2-مفسر	مفَسر
3-مستقل	تابع
4-مسبب	متأثر
5-خارجي	داخلي
6-المتغير المتحكم	المتغير الهدف

كل من هذه المصطلحات يستخدم حسب الغرض من تحليل الانحدار فالمصطلح الأول يستخدم في عملية التنبؤ بينما المصطلحات الأخرى تستخدم في مناقشة الانحدار. اما المصطلح خارجي وداخلي تستخدم فقط من قبل القياسيين. بينما المصطلح الأخير يستخدم في التجارب الخاصة بدراسة تأثير مسببات معينه على متغير مستهدف.

2.2 تحديد العلاقة:

العلاقة بينY وX تمثل بالتالي:

$$Y = f(X) \qquad 1.2$$

حيث ترمز لـ Y كدالة لـX. نستطيع إن نقسم العلاقة إلى نوعين:-

1- علاقة رياضية محدده.Deterministic

2- علاقة إحصائيه لا تعطي قيمه فريدة لــ Y من قيمه محدده من X. ولكن يمكن أن توصف بصيغة احتماليه.

سوف نتحدث هنا في تحليل الانحدار عن العلاقة من النوع الأول على سبيل المثال العلاقة بين المبيعات و النفقات الاعلانيه يمكن أن توصف بما يلي:-

$$Y = 2500 + 100X \qquad 2.2$$

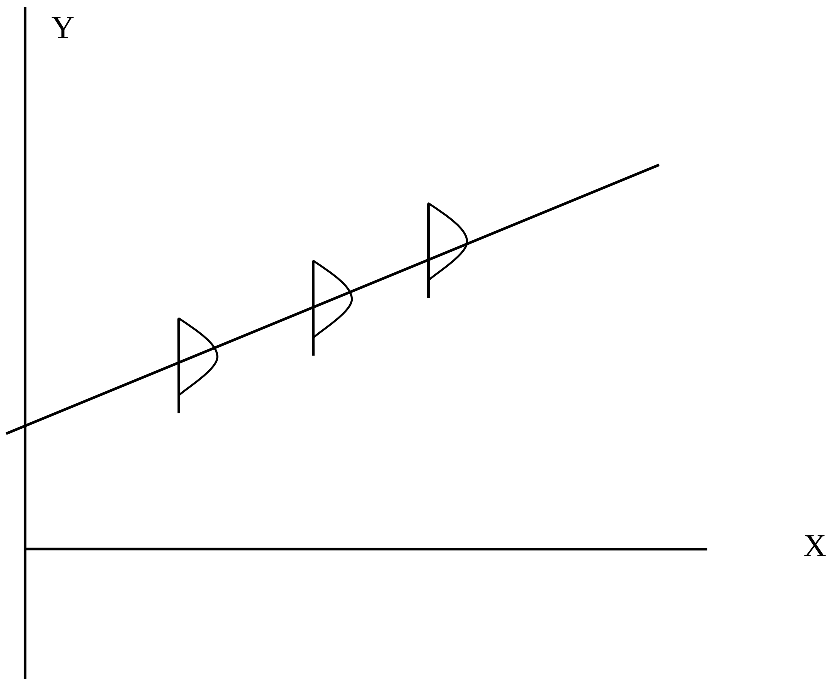
هذه علاقة محدده deterministic . حيث يمكن تحديد المبيعات لكل مستوى من النفقات الاعلانيه، كما يلي:-

Y	X
2500	0
4500	20
7500	50
12500	100

في الجانب الأخر، نفترض أن العلاقة بين المبيعات والنفقات الاعلانيه كما يلي:-

$$Y = 2500 + 100X + u \qquad 3.2$$

قيمة u تتراوح بين قيم معينه حسب جدول للاحتمالات يعطي لكل قيمه احتمال معين على سبيل المثال:- الاحتمالات أن قيمة u اكبر من 500 يساوي ½ واقل من 500 يساوي ½ . لذا لا نستطيع تحديد قيمة Y من قيمة X نقول إن هناك العديد من قيمY المقابلة لقيمة واحدة من X . إذا كان هناك توزيع طبيعي لقيم Y المقابلة لقيمه واحدة من X . كما هو في الشكل



الخط الذي يمثل العلاقة هو العلاقة التحد يديه . ولكن القيم الحقيقية لـ Y تمثل الخط العمودي وتسمى العلاقة بين X ,Y علاقة عشوائية.

بالرجوع إلى المعادلة التي تمثل الدالة.نستطيع القول إن الدالة تمثل الخط $f(x) = \alpha + \beta X$

بينما العلاقة العشوائية هي $f(x) = \alpha + \beta X + u$

حيث تمثل u الخطأ العشوائي. وتمثل α β معاملات الانحدار.

لماذا يتم إضافة الخطأ العشوائي للمعادلة؟

1- يمثل عنصر العشوائية في استجابة الإنسان مثل اختلاف النفقات الاستهلاكية من فرد لأخر مع العلم انهم قد يتساووا في الدخل.

2- تأثير عوامل أخرى محذوفة مثل العادات حجم ألا سره وغيرها من العوامل.

3- خطأ في قياس المتغير التابع.

الهدف هو الحصول على تقدير للمعاملات الغير معروفه α β للقيام بعملية التقدير يجب افتراض بعض الافتراضات الخاصة بالخطأ العشوائي:

1- الوسط الصفري.E(u)=0

-أن وســـــط التوزيع الاحتمالي الخاص بالمتغير العشوائي = الصفر. إي أن قيم u تتمركز حول الصفر.

2- تساوي التباين $V(u) = \sigma^2$.

تباين التوزيع الاحتمالي الخاص بالعناصر العشوائية u يساوي قيمه ثابتة وموجبة.

3- استقلالية الخطأ العشوائي: أي أن التغاير، درجة الارتباط بين قيم العشوائي = الصفر

أي انها مستثقله عن بعضها. $COV(u_i, u_j) = 0$

4- التوزيع الطبيعي للخطأ العشوائي. $u_i \sim N$

تمثل هذه الافتراضات بالتالي $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

<u>3.2 تقدير نموذج الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى:-</u>

هناك عدة طرق لتقدير معاملات معادلة الانحدار أهمها 1)طريقة المربعات الصغرى. 2) طريقة الإمكانية العظمى.

في المرحلة الأولى نفترض وجود الفروض الاساسيه لمعالجة النموذج الخطي. وفي المراحل اللاحقة نتعرض للحالات التي تكون فيها هذه الفروض غير صحيحه.

نموذج الانحدار بالافتراضات الأساسية كما يلي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u$$

هي المعادلة الأساسية التي تصور العلاقة بين التابع والمستقل حيث i تعتمد على العينة التي يبلغ حجمها n . بالأضافه إلى المعادلة ألأساسيه نقول أن النموذج يحتوي افتراضات عن المتغير العشوائي.

تقدير النموذج يتم بغرض الحصول على مقدرات معالم نموذج الانحدار البسيط. نموذج الانحدار البسيط يتضمن ثلاث معالم هي, α ,معلمة القاطع، β , معلمة الميل، σ^2 معلمة التباين. المراد هو استخدام إحصائيات المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة حسب الطرق الإحصائيه الملائمة للحصول على مقدرات لهذه المعالم.

طريقة المربعات الصغرى

تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات , الانحدار حيث تمثل α معلمة القاطع، β , معلمة الميل. بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البوا قي إلى آدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البوا قي وبعد ذلك يشرع في الحصول على α ،, β , بحيث يتم تصغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له.

طريقة المربعات الصغرى تعطينا مقدرات الانحدار α ،, β , ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف طريقة المربعات الصغرى.

المعيار الخاص في المربعات الصغرى العادية: النموذج المقدر هو كما يلي

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u_i$$

u هي البوا قي والتي تساوي من النموذج $u_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X)$ نموذج الانحدار ممكن أن يمر من خلال انتشـــار البيانات الخاصة بـ X, Y، الخط المقدر هنا هو الذي يعطي Y المقدرة

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

إذا أخذنا إحداثيات القيم Y,X إحداثيات النقطة الأولى تنقسم إلى قسمين، قسم من المحور الأفقي في النموذج المقدر، هذا عبارة عن $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$ الجزء الثاني عبارة عن قيمة البوا قي. فالمشاهدة Y هي حصيلة جمع $u + \hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$ أي أن أي مشاهده مكونه من جانبين، جانب

الخط المقدر والبواقي. البواقي بحكم أنها مقدرة العنصر العشوائي يمكن أن تكون موجبة وممكن أن تكون سالبه وكذلك من الناحية النظرية يمكن أن تساوي الصفر.

للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية يجب أن نحصل أولا على البواقي:

$$u_t^2 = (\hat{Y} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X))^2$$

مجموع مربعات البواقي $=\sum u^2$

$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)^2$$

يتم التوصل إلى الخط الذي تكون فيه مجموع مربعات البواقي اصغر ما يمكن [اختيار الخط الذي يدني مجموع مربعات البواقي إلى أصغر ما يمكن]. باستخدام الرياضيات فأن شرط الدرجة الأولى يتطلب أجراء التفاضل بالنسبة للمجاهيل α β نستخدم التفاضل الجزئي وبعد ذلك نساوي المعادلات التي تم أل تحصل عليها بالصفر ثم نطبق المعادلات الآنية للحصول على قيم المقدرات.

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\alpha}} = (2)\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-1) = 0$$

$$= (-2)\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$ نساوي بالصفر

بادخال المجموع Σ وحيث ان αعدد ثابت فأن $\Sigma\alpha = n\alpha$ ثم بقسمة المعادلة على n نحصل على مايلي:

$$\sum Y_i - \sum_i \hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum_i X = 0$$

$$\sum_i \hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum_i X$$

$$n\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum_i X$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum_i X}{n}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = (2)(\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-X) = 0$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = -2\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$(\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$-\sum XY + \sum X\alpha + \sum \beta X^2 = 0$$

نساوي بالصفر

$$\sum XY = \alpha \sum X + \beta \sum X^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\hat{\alpha} + \left(\sum_{i=1}^{n} X^2\right)\hat{\beta} \qquad 2.5$$

بالتعويض بقيمة α نحصل على

$$\sum XY = \sum X\left(\frac{\sum Y}{n} - \beta\frac{\sum X}{n}\right) + \beta \sum X^2 \qquad 2.6$$

بالضرب في n

$$n\sum XY = \sum X \sum Y - \beta(\sum X)^2 + \beta\, n\sum X^2$$

$$n\sum XY - \sum X \sum Y = -\beta(\sum X)^2 + \beta\, n\sum X^2$$

$$= \beta\, n\sum X^2 - \beta(\sum X)^2 \qquad 2.7$$

$$= \beta\left(n\sum X^2 - (\sum X)^2\right)$$

معادلة 2.7 تسمى المعادلات الطبيعية ونستطيع استخراج قيم β α منها

بالتعويض نحصل على

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =}$$

من الممكن الحصول على المقدرات باستخدام الانحرافات كما يلي:

$$\sum y_i = \sum (Y - \overline{Y})^2 \qquad = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2$$

$$\sum xy = \sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = \sum XY - n\overline{XY}$$

$$\sum x^2 = \sum (X - \overline{X})^2 \qquad = \sum X^2 - n\overline{X}$$

ولكن

$$\sum Y_i X_i = \sum X_i (\overline{Y}_i - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}(\overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}\,\overline{Y} - \hat{\beta}n\overline{X}\,\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i - n\overline{X}\,\overline{Y} = -\hat{\beta}n\overline{X}\,\overline{X} + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum XY - n\overline{XY} = -\hat{\beta}n\overline{X}^2 + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum xy = \beta\left[nX^2 - \sum X^2\right]$$

$$\sum xy = \beta\sum x^2$$

$$\beta = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

<u>مثال (1)</u>

X	**Y**	**X^2**	**x**	**y**	**XY**	xy	x^2
2	4	4	-2	-4	8	8	4
3	7	9	-1	-1	21	1	1
1	3	1	-3	-5	3	15	9
5	9	25	1	1	45	1	1
9	17	81	5	9	153	45	25
∑X= 20	**∑Y= 40**	**$\sum X^2$= 120**			**∑XY= 230**	**∑xy=70**	**$\sum x^2$=40**

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =$$

$$\hat{\beta} = \frac{(5)(230)-(20)(40)}{5(120)-(20)^2} = 1.75$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 8 - 1.75(4) = 1$$

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X =$$

$$\hat{Y} = 1 + 1.75X$$

باستخدام الانحرافات $\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{70}{40} = 1.75$

	X	Y	x	y	xy	x^2	XY	X^2
1	**100**	**55**	30	-45	1650	900	5500	10000
2	**90**	**70**	20	-30	1400	400	6300	8100
3	**80**	**90**	10	-10	900	100	7200	6400
4	**70**	**100**	0	0	0	0	7000	4900
5	**70**	**90**	0	-10	0	0	6300	4900
6	**70**	**105**	0	5	0	0	7350	4900
7	**70**	**80**	0	-20	0	0	5600	4900
8	**65**	**110**	-5	10	-550	25	7150	4225
9	**60**	**125**	-10	25	-1250	100	7500	3600
10	**60**	**115**	-10	15	-1150	100	6900	3600
11	**55**	**130**	-15	30	-1950	225	7150	3025
12	**50**	**130**	-20	30	-2600	400	6500	2500
المجموع	**840**	**1200**			**-3550**	**2250**	**80450**	**61050**
	X=70	**Y=100**						
					β=-3550/2250=-1.6			

4.2 خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية (م ص ع)

الخصائص الإحصائي التي تتميز فيها مقدرات المربعات الصغرى العادية.

تتميز المقدرات α β بثلاث خواص أساسيه:

1) الخطية 2)عدم التحيز 3) الكفاءة

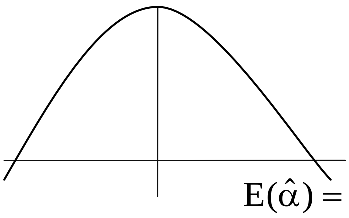
1) الخطية: $\hat{\alpha}$تعتبر داله خطية للعنصر العشوائي التابع Y . أهمية هذه الخاصة أنها تعطينا درجه من البساطة في أجراء الحسابات حيث انه لحساب α β نستعمل

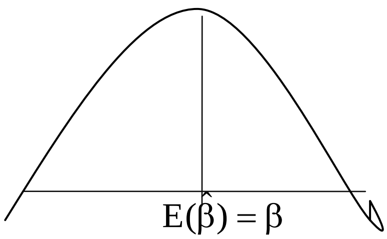
المتغير التابع في صوره خطيه فقط هذه لتبسيط الحسابات.

2) <u>عدم التحيز:</u> مقدرات (م ص ع) $\hat{\alpha}$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة α . عدم التحيز يتطلب بأن القيمه المتوقعة لـ $\hat{\alpha}$ و التي هي قيمة المعلومة الحقيقية بمعنى آخر متوسط $\hat{\alpha} = \alpha$. إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب $\hat{\alpha}$ يتم أخذ المتوسط. ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية. $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ مقدرات (م ص ع) $\hat{\beta}$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة β حيث أن $E(\hat{\beta}) = \beta$. أي أن توقع $\hat{\beta}$ يجب أن يساوي المعلم ه الحقيقية بمعنى آخر متوسط قيم $\hat{\beta}$ أو في المتوسط $\hat{\beta}$ تساوي القيمة الحقيقية للمعلمه β.

هذه الأوضاع كلها نظريه بحتة في الواقع لا يكون عندنا عدد من العينات، بكون في الواقع عينه واحدة فقط وتعطينا قيمه واحدة $\hat{\alpha}$، قيمه واحدة $\hat{\beta}$ يعتمد عليها في التحليل، من الناحية النظرية نقول أن هذه المقدرات يتوقع أنها تساوي القيمة الحقيقية من الناحية الأخرى القيمة الحقيقة لا نعرفها وبالتالي هذه الخصائص خصائص نظريه بحتة.

على الرسم البيباني، رسم دالة احتمال $\hat{\beta}$ ، خاصية عدم التحيز تقول أن توزيع احتمال $\hat{\beta}$ يأخذ هذا الشكل يتمركز حول القيمة الحقيقية، لـ β يعني أن القيمة المتوقعة لـ$\hat{\beta}$ تساوي β $E(\hat{\beta}) = \beta$ وأن قيمة β تساوي المعلمة الحقيقية ونفس التحليل ينطبق على α.


$E(\hat{\alpha}) = \alpha$


$E(\hat{\beta}) = \beta$

<u>تباين المقدرات:</u> تباين اي قيمة تتوزع حول وسط معين هو معدل تشتت هذه القيم عن الوسط ويكون القانون الخاص بتباين مقدرة القاطع:

$$V(\hat{\alpha}) = E\{\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})\}^2$$

بإجراء بعض الخطوات يمكن إن نبرهن إن تباين $\hat{\alpha}$ يساوي

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum X^2}{n \sum x^2}$$

من المعادلة نلاحظ إن تباين $\hat{\alpha}$ تعتمد على تباين u فإذا زاد تباين u توقع زيادة تباين $\hat{\alpha}$ لان هناك علاقة طرديه بين تباين $\hat{\alpha}$ وتباين u . وتوجد صيغه أخرى لتباين $\hat{\alpha}$ على انه يساوي :

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}\}$$

اما القانون الخاص بتباين $\hat{\beta}$:

$$V(\hat{\beta}) = \{\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\}^2$$

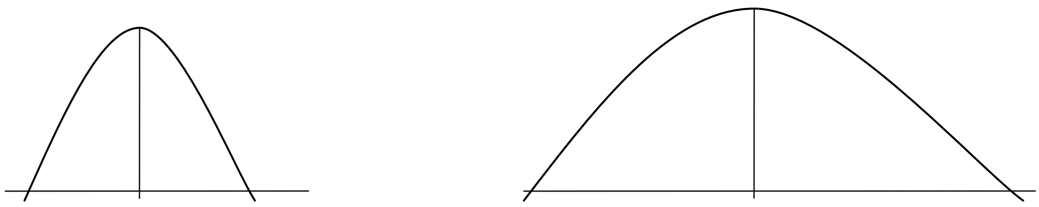
يمكن إن نثبت إن التباين الخاص بـ $\hat{\beta}$ يساوي $V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}$

ومن المعادلة نلاحظ إن تباين $\hat{\beta}$ يعتمد طرديا على تباين u وعكسيا على مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل، فكلما ازدادت درجة انتشار المتغير المستقل (آي بيانات X مختلفة كثيرا عن بعضها) نتوقع إن يزيد المكون الموجود في المقام وبالتالي ينخفض تباين $\hat{\beta}$ مما يشعر إلى دقة التقديرات.

3- <u>آدني تباين</u>:

الخاصية الثالثة لمقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين هذه الخاصية لها أهمية بالغة في الاقتصاد القياسي لان آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعني أعلى دقة من ناحية القياسات.

هناك علاقة عكسية بين التباين ودقة القياسات كلما زاد التباين كلما انخفضت دقة القياسات وكلما قل ارتفعت دقة القياسات. لأن مقدرات م ص ع $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ تلك المقدرات تمتلك آدني تباين نعني مقارنه بمقدرات أخرى تقاس بطريقه مختلفة عن م ص ع فان مقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين إي تتحلى بأعلى دقه. نفترض إن هناك مقدرات لـ α β تحصل عليها بطريقه مختلفة ونفترض إن المقدرات الأخرى α'', β'' ا ذا افترضنا أن تلك المقدرتين خطيه وغير متحيزة سيكون الاختلاف في خاصية أن مقدرات م ص ع $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ تمتلك أعلى دقة.



(1) (2)

$E(\hat{\beta}) = \beta$ $E(\beta'') = \beta$

$V(\hat{\beta}) < V(\beta'')$

في الحالة (1) استخدمت مقدرات م ص ع . في الحالة الثانية (2) مقدرات أخرى غير م ص ع , في الشكل التوزيع الاحتمالي لقيمة المقدرات β'', $\hat{\beta}$. في (1) يتبين ان التباين قليل، درجة الانتشار لـ $\hat{\beta}$ اقل وبالتالي تتمركز قيم $\hat{\beta}$ حول القيمة الحقيقية وفي الشكل (2) قد نحصل على قيم حول β لكنها بعيده عن المعلمة الحقيقية.

من الشكل إن احتمال الحصول على $\hat{\beta}$ أقرب للمعلمة الحقيقية من β'', وبالتالي درجة احتمال العثور على $\hat{\beta}$ أقرب مما سواها، هذا ما يقصد بخاصية أدنى تباين.

من النتائج التي توصلنا أليها عن مقدرات م ص ع يمكن أن نقول أن شكل التوزيع الاحتمالي الخاص بالمقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$

$$\hat{\alpha} \sim N\left[\alpha, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x^2}\right)\right], \quad \hat{\beta} \sim N\left[\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]$$

من المعادلتين يتبين انه :

1- كلما زاد التباين σ^2 كلما زاد تباين المقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

2-كلما كان انتشار قيم X اكبر كلما قل تباين $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$

مثال (2):

البيانات التالية عن السعر وكميه البرتقال الذي تم بيعه في أحد أسواق الخضـار في مدة 12 يوم إذا رمزنا للسعر بـ X والكميه بـY

باستخدام المعادلة التالية:

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

$$\bar{X} = 70, \sum xy = -35550$$

$$\bar{Y} = 100, \quad \sum x^2 = 2250$$

$$\hat{\beta} = \frac{-3550}{2250} = -1.578$$

$$\hat{\alpha} = 100 - (-1.578)70 = 210.460X + u$$

$$\hat{Y} = 210.46 - 1.578X.$$

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x^2}) = \sigma^2 (\frac{1}{12} + \frac{(70)^2}{2250}) = 2.2611\sigma^2$$

$$V(\hat{\beta}) = \beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sigma^2}{2250} = 0.00044\sigma^2$$

<u>تقدير التبـاين</u>σ^2 **:** حيث أن σ^2 مجهولـة والتـي نحتاجها لنتمكن من حسـاب تبـاين $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

نستخدم مقدرة σ^2 = مجموع مربعات البواقي/درجة الحرية

$$\sigma^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} \qquad 7.2$$

بحساب مربعات مجموع البواقي من قيمة $\sum u^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 698$

إذا مقدرة التباين $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} = \frac{698}{12-2} = 69.8$

ومنها يمكن الحصول على مقدرات تباين $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}) = 69.8(\frac{1}{12} + \frac{(70)^2}{2250}) = 157.82$$

$$V(\hat{\beta}) = \beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{69.8}{2250} = 0.0310$$

مثال 3

X	Y	X^2	x	y	XY	xy	x^2	Y^	u	u^2
2	4	4	-2	-4	8	8	4	4.5	0.50	0.2500
3	7	9	-1	-1	21	1	1	6.25	0.75	0.5625
1	3	1	-3	-5	3	15	9	2.75	0.25	0.0625
5	9	25	1	1	45	1	1	9.75	0.75	0.5625
9	17	81	5	9	153	45	25	16.75	0.25	0.0625
$\sum X=20$	**$\sum Y=40$**	**$\sum X^2= 120$**			**$\sum XY= 230$**	**$\sum xy=70$**	**$\sum x^2=40$**			**$\sum u^2=1.5$**

$$u = Y - \hat{Y} = Y - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X) = Y - 1 - 1.75(X)$$
$$X = 2,3,1,5,9$$

للحصول على مقدرة التباين نستخدم المعادلة التالية $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

$$\sigma^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} = \frac{1.5}{5-2} = 0.5$$

وبعد ذلك نستطيع أن نتحصل على تباين المقدرات

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}) = 0.5(\frac{1}{5} + \frac{(120)^2}{40}) = 0.3$$

$$V(\hat{\beta}) = \beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{0.5}{40} = .0125$$

وللحصول على الانحراف المعياري نتحصل على الجذر التربيعي للتباين:

$$Se(\hat{\beta}) = \sqrt{V(\hat{\beta})} = \sqrt{0.0125} = 0.112$$

$$Se(\hat{\alpha}) = \sqrt{V(\hat{\alpha}} = \sqrt{0.3} = 0.548$$

5.2 فترات الثقة Confidence Interval

المقدرات مؤشــرات مهمه يمكن إن تستخدم لاستخلاص نتائج عن المجتمع التي استخلصت منه هذه المقدرات.لبناء فترات الثقة وأجراء اختبارات الفروض نستخدم التوزيع الطبيعي:

فترة الثقة:

$$\hat{\beta} \sim N\left[\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right], \qquad \hat{\beta} \sim N\left[\beta, \sigma_{\hat{\beta}}^{\ 2}\right]$$

إذا كانتβ تتوزع طبيعيا فستكون قيمة Z كما يلي:

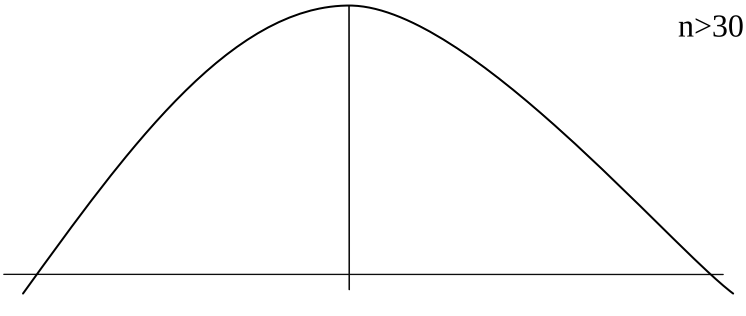
$$Z = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma_{\hat{\beta}}}$$

إذا أخذت أي عشوائي يتوزع توزيع طبيعي وطرحت منه الوسط الخاص به وقسمته على الانحراف المعياري فان القيمة المتحصل عليها هي قيمة Z التي تتوزع طبيعيا بوسط صفر وتباين وانحراف معياري يساوي الواحد الصحيح. توزيع Z كما هو معروف يمكن استخلاص الاحتمالات الخاصة به من جدول التوزيع الطبيعي. وبذلك يمكن تحديد الاحتمال الخاص بحدوث أي قيمه من Z بالنظر إلي الجدول حيث يشير العمود الرأسي إلي اليسار إلي قيم Z والقيم بداخل الجدول تشير إلي الاحتمالات.

لاختبار الفرضية فإننا نختبر هل $\hat{\beta}$ تساوي β أم تختلف عنها وإذا كانت تختلف هل هذا الاختلاف قليل يمكن التعايش معه أي إن الاختلاف راجع إلي العشوائية فقط وليس بالاختلاف الكبير الذي يشير إلي انه لا ينتمي إلي نفس المجتمع. ونرفض الفرضية انهما متساويان.

في القانون أعلاه هناك معلمه غير متوفرة وهي معلمة تباين المجتمع فاستخدمنا مقدرة التباين. مقدرة التباين لا تمتلك التوزيع الطبيعي ولكن تتبع توزيع t والذي يتحدد تبعا لدرجات الحرية المستعملة أي في هذه الحالة إلي n-2. توزيع t هو توزيع احتمالي مشابه للتوزيع الطبيعي وتوزيع t يتمركز حول الصفر ويأخذ شكل مماثل لتوزيع Z ،ويستخدم توزيعZ فقط عندما تكون حجم العينه كبيره n>30

توزيع t



الاختبار الإحصائي يكون

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta*}{Se_{\hat{\beta}}}$$

يمكن حساب فترات الثقة كما يلي:

$$\hat{\beta} \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{\beta})$$

$$\hat{\alpha} \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{\alpha})$$

قيمة t تمثل القيمة اختبار t عند درجة حرية n-2 عند مساحة λ/2 من توزيع t من المثال (3)

$$\hat{\beta} \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{\beta})$$

$$1.7 \pm 2.228 \times 0.112$$

$$\pm 0.2495$$

$$1.45 \_\_\_\_ 1.94$$

$$\hat{\alpha} \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{\alpha})$$

$$1 \pm 2.228 \times 0.548$$

$$1 \pm 1.2209$$

$$-0.22 \_\_\_\_ 2.22$$

إن شرح فترة الثقة يعني إن إن الاحتمال أن فترة الثقة المحددة تعطي المعلمة الحقيقية يساوي (λ -1) . ويستخدم عادة مستوى الثقة 95% أو 99%.

6.2 اختبار الفرضيات

:يتعلق اختبار الفرضيات بإيجاد ألا جابه على هذا السؤال ما اذا كانت القيمة المحسوبة من العينة متوافقة مع الفرضية أم لا؟ الكلمة متوافقة هنا تعني أن القيمة المحسوبة قريبه من القيمة المفترضة بحيث أننا لا نستطيع إن نرفض القيمة المفترضة. إي إذا كان هناك نظريه سابقه أو اعتقاد إن الميل الحقيقي لدالة الاستهلاك والدخل يساوي على سبيل المثال 1 هل القيمة المحسوبة أو المشاهدة والتي تساوي β=0.509 و تحصل عليها من العينة متفقه مع القيمة التي افترضناها سابقا؟ إذا كان الجواب بنعم فاننا لا نرفض الفرضية.في القياسي نسمي القيمة المفترضة بفرضية العدم لفرضية البديلة

فرضية العدم $H_0 : \beta = \beta*$ الفرضية البديلة $H_A : \beta \neq \beta*$

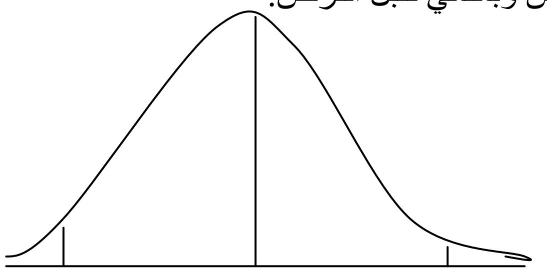
من المثال (1) نفترض إننا سوف نقوم باختبار الفرضية انه ليس هناك علاقة بين Y, X

فرضية العدم $H_0 : \beta = 0$ الفرضية البديلة $H_A : \beta \neq 0$

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{Se_{\beta}} \quad t = \frac{1.75 - 0}{0.112} = 15.65, \qquad t_{(n-k),(1-\alpha/2)} = t_{3,(0.975)} = 3.182$$

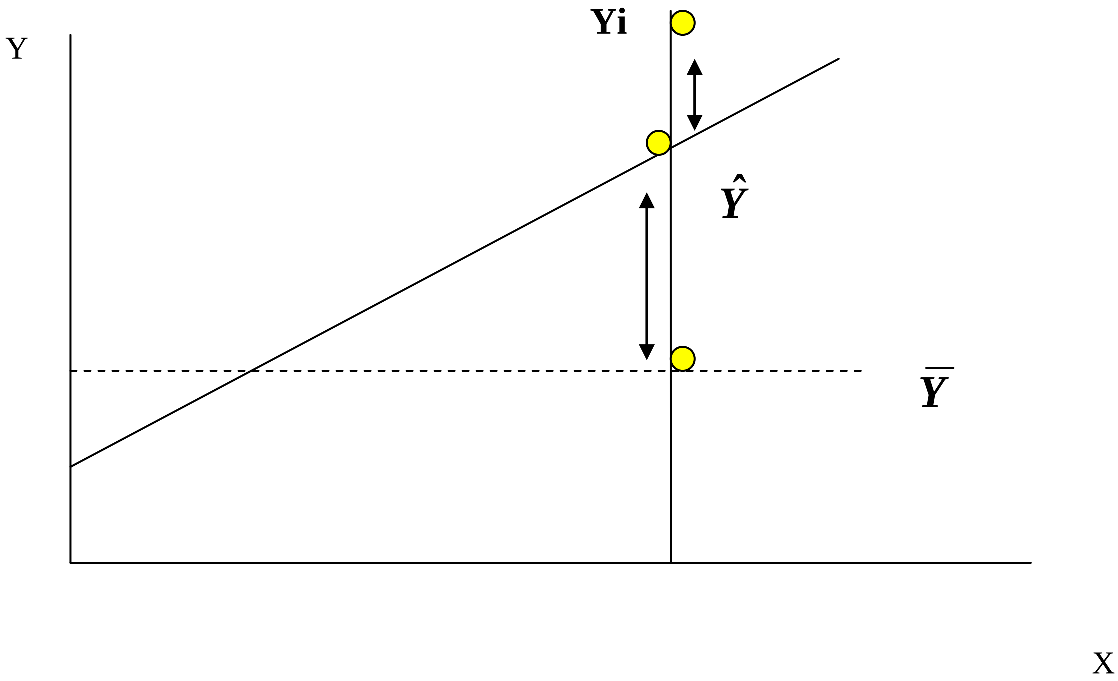
الاختبار يقارن بين ما تقوله الفرضية وما تقوله العينة إذا كان الفرق كبير إي اكثر من القيمة الجد وليه التي نحصلنا عليها من جدول t فأننا نرفض الفرض. إذا كان الفرق قليل فان هذا يعني إن العينة تؤيد ما يقوله الفرض وبالتالي نقبل الفرض.

توزيع t



t الجدوليه =3.182

يعني إننا يجب إن نوجد القيمة الفرضية من اجل اتخاذ القرار آما بقبول أو برفض . إن قرار القبول أو الرفض يتعلق بفرضية العدم وليس بالفرضيه البديلة.



$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X, \qquad Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u \quad Y_i - \hat{Y} = u$$

7.2 اختبار جودة النموذج وتحليل التباين.

$$SST = \sum y_i = \sum (Y - \bar{Y})^2$$
$$SSR = \sum \hat{y}^2 = \beta \sum x_i^2 = \sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2$$
$$SSE = \sum u_i^2 = \sum (\hat{Y} - Y)^2$$
$$SST = SSR + SSE$$

SST Total Sum of Squares	مجموع المربعات الإجمالي للتغيرات التي تحدث في المتغير التابعY
SSR Regression Sum of Squares	يسمى بمجموع مربعات الانحدار يعني جزء من تباين Y الذي تم تفسيره بواسطة الانحدار. إي الجزء من المتغيرات التي تحدث في المتغير التابع والذي تم تفسيرها بواسطة النموذج المقدر
SSE Error	مجموع مربعات البواقي، $\sum u^2$, وهذا مؤشر للجزء الذي لم يفسر بواسطة نموذج الانحدار، إي الجزء الذي فشل النموذج في تفسيره

ويمثل نسبة مجموع مربعات الانحدار إلي مجموع المربعات الإجمالي ما يسمى بـ معامل التحديد

$$\boxed{R^2_{xy} = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{\hat{\beta}\sum xy}{\sum y_i^2}}$$

قيمة R^2 تتراوح بين صفر وواحد. إذا كانت مرتفعه أي قريبه من الواحد تعتبرX جيده في تفسير التغيرات في Y. إذا كانت قريبه من الصفر فان المتغير لا يشرح إلا القليل من التغير في Y.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\hat{\beta}\sum xy}{\sum y^2} = \frac{1.75(70)}{124} = \frac{122.5}{124} = 0.9879$$

<u>جدول تحليل التباين لمعادلة الانحدار ANOVA(Analysis Of Variance):</u> وهو إن تحليل مجموع المربعات الصغرى إلي مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحدار. الغرض من هذا التحليل لاختبار معنوية مجموع مربعات الانحدار وهذا أيضا يدخل في اختبار معنوية المعامل β. ونمثل هذا التحليل في جدول تحليل التباين:

<u>جدول تحليل التباين ANOVA</u>

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مجموع مربعات الانحدار	$SSR = \sum \hat{y}^2 = \hat{\beta}\sum xy = \hat{\beta}^2 \sum x^2 =$	k-1=2-1	SSR/1
مجموع مربعات البواقي	$SSE = \sum u^2 = \sum y^2 - \sum \hat{y}^2$	n-k=n-2	SSE/(n-2)

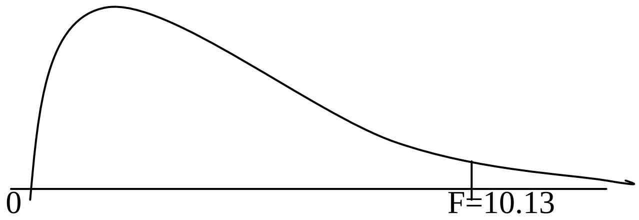
مجمـــــوع مربعـــــات الإجمالي	$SST = \sum y^2 = \sum \hat{y}^2 + \sum u^2$	n-2=3	$F = \dfrac{SSR}{SSE / n - k}$

<u>جدول تحليل التباين للمثال (1)</u>

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مجموع مربعات الانحدار	SSR=122.5	K-1=1	122.5/1
مجموع مربعات البواقي	SSE=1.500	n-k=3	1.5/3
مجموع مربعات الإجمالي	SST=124	n-1=4	$F = \dfrac{122.5/1}{1.5/3} = 245.00$

اختبار F هو اختبار لجودة النموذج. يحاول أن يجيب على السؤال هل افلح النموذج في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع. ويختبر الفرضية إن معاملات المتغيرات المفسرة تساوي الصفر. أي أن فرضية العدم تقول انه لا يوجد علاقة بين المتغيرات المفسرة والمتغير التابع. وتقارن قيمة المحسوبة من الجدول مع الجد وليه بدرجة حرية للبسط تساوي k-1 ودرجة حرية المقام n-k. قيمة الجد وليه عند مستوى معنوية 5%تساوي 10.13.

توزيع F



<u>8.2 التنبؤ باستخدام معادلة الانحدار:</u>

معادلة الانحدار المقدرة $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u_t$ تستخدم في عملية التنبؤ لقيم Y لقيم محدده من X . إذا كانت X_0 تمثل القيمة المحددة منX تستخدم في التنبؤ بقيمة Y_0 من قيم Y.

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0 + u_0$$

حيث u تمثل حد الخطأ.

حيث يمثل خطأ التنبؤ $$\hat{Y}_0 - Y_0 = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta)X_0 + u_0$$

حيث إن $$E(\hat{\alpha} - \alpha) = 0, E(\hat{\beta} - \beta) = 0, E(u_0) = 0$$

إذا تكون $$E(\hat{y}_0 - y_0) = 0$$

هذه تعني إن قيمة Y هي قيمه غير متحيزة ويكون تباين يساوي:

$$V(\hat{y}_0 - y_0) = V(\hat{\alpha} - \alpha) + X_0^2 V(\beta - \beta) + 2X_0 COV(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\beta} - \beta) + V(u)$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right] + \sigma^2 \frac{X_0^2}{\sum x_i^2} - 2X_0 \sigma^2 \frac{\overline{X}}{\sum x_i^2} + \sigma^2$$

$$\boxed{= \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum x^2} \right]}$$

أي إن التباين يرتفع بارتفاع تباين X أي باختلاف قيم X عن قيم متوسطها.

باستخدام البيانات أعلاه نحصل على $Y=10.0+0.90\ X$

$\hat{\sigma}^2 = 0.01, \overline{X} = 200, \sum x_i^2\ 4000,$ إذا استخدمنا $X_0 = 250$ ستكون قيمة Y_0 المتنبأ بها

يساوي: $Y_0 \ =10.0+0.9(250)=235$

$$SE(\hat{Y}_0) = \sqrt{0.01\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{2500}{400}\right)} = 0.131$$

حيث أن $t=2.228$ من جدول مع 10 درجات حريه، و فترة الثقة 95% تكون

$$235 \pm 2.228\ (0.131) = 235 \pm\ 0.29$$

آي أن فترة الثقة تساوي $(234.71 \quad - \quad 235.29)$

<u>التنبؤ للقيمة المتوقعة:-</u>

أحيانا يرغب الباحث في التنبؤ بالقيمة المتوقعة لـY بدلا من Y_0 آي قيمة $E(Y_0)$ آي القيمة المتوسطة لـ $E(Y_0$ وليس Y_0 . عند التنبؤ بالقيمة المتوقعة فان $E(Y_0) = Y_0$ حيث أن $E(Y_0) = \alpha + \beta X_0 + u_0$ فان القيمة المتنبأ بها تساوي $\hat{E}(Y_0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0 + u_0$ آي يساوي Y_0 ولكن الخطأ المعياري والتباين سيكون مختلفا. سيكون اصغر قيمه

$$\hat{E}(y_0) - E(y_0) = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta) X_0$$

التباين يساوي:

$$\boxed{Var[E(y_0) - E(y_0)] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum x^2} \right]}$$

والخطأ المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين وفترة الثقة تساوي

$$\boxed{\hat{E}(y_0) \pm t\ SE}$$

مثال:

	المبيعات Y	النفقات الأعلانيهX
1	3	1
2	4	2
3	2	3
4	6	4
5	8	5

للحصول على مقدرات النموذج:

مشاهده	المبيعات Y	النفقات الأعلانيهX	X^2	XY	u
1	3	1	1	3	0.80
2	4	2	4	8	0.60
3	2	3	9	6	2.60
4	6	4	16	24	0.20
5	8	5	25	40	1.00
	15	23	55		

SSE=8.8 X=3.0 Y =1.0 + 1.2 X

نفترض إن مدير المبيعات يرغب في التنبؤ بدخل المبيعات عندما تكون النفقات الاعلانيه تساوي 600 ريال. ويريد أيضا بناء 95% فترة ثقة لتنبؤه. X_0 =6 إذا

y=1.0 + 1.2(6)=8.2

والتباين يساوي $= \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{5} + \frac{(6-3)^2}{10} \right] = 2.1\sigma^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{d.f} = \frac{8.8}{3} = 3.93$$

الخطأ المعياري $\sqrt{2.1(2.93)} = \sqrt{6.153} = 2.48$

عند مستوى المعنوية 5% ، ودرجة حرية df=2.353. و 90% فتره

تطبيق

دالة الاســتهلاك الخاص للملكة العربية الســعودية:

$$C = \hat{\alpha} + \hat{\beta}Y$$

حيث ترمز X الى الاستهلاك الخاص و Y الى الدخل.
البيانات:

Year	Private Consumption X الاستهلاك الخاص	GDP الدخل (اجمالي الناتج المحلي) باسعار الجاريه
1975	23.90	164.53
1976	34.75	205.06
1977	54.61	225.40
1978	68.61	249.54
1979	102.39	385.81
1980	114.91	520.59
1981	126..39	524.72
1982	151.29	415.23
1983	157.37	372.07
1984	159.35	351.40
1985	158.59	313.94
1986	140.15	271.09
1987	135.54	275.45
1988	139.40	285.15
1989	145.03	310.82
1990	155.87	391.99
1991	168.75	442.04
1992	183.92	461.40
1993	193.91	443.84
1994	185.83	450.03
1955	191.10	470.70
1996	206.21	511.33
1997	207.35	547.41

$$\ln C = -3.33 + 1.38 \ln Y$$
$$n = 23, \quad K = 2$$
$$SSE = 0.341$$
$$SSR = 2.44$$
$$\overline{Y} = 4.82$$
$$SE(\hat{\alpha}) = 1.29, \quad SE(\hat{\beta}) = 0.219$$
$$t_{\alpha} = \quad = \frac{-3.33 - 0}{1.29} = -2.57$$
$$t_{\beta} = \quad = \frac{1.38 - 0}{0.219} = 6.31$$
$$t_{(n-k)(1-0.025)} = t_{(21,0.975)} = 2.080$$

$$F = 39.88 \quad F_{(k-1)(n-k)} = F_{1,21} = 4.32$$
$$R^2 = 0.65$$

الملحق (1)

<u>طريقة الإمكانية العظمى Maximum Likelihood Method (ML)</u>

هي طريقة احصائيه تستعمل في مجال التقدير أول من قدمها الإحصائي المشهور Fisher. الإمكانية : مفهوم احتمال حدوث عمل ما. وهي طريقة للتقدير الإحصائي مثلها مثل طريقة المربعات الصغرى تستخدم في تقدير قيم المعالم المجهولة ويمكن أن تطبق على نماذج الانحدار وممكن تطبيقها على آي علاقة مجتمع تحتوي على معالم مجهولة، تتميز مقدرات الإمكانية العظمى بخواص جيدة ومطلوبة سنرى طبية هذه الخواص فيما بعد. طريقة الإمكانية العظمى تتطلب أجراء حسابات معقدة مثل الحسابات المعقدة كانت عامل مهم في الماضي، لكن الآن الحسابات تجري بواسطة الحاسبات الآلية وبالتالي هذا الاعتبار لا يشكل نقيصة فيما يختص باستخدام الإمكانية العظمى.

الإمكانية العظمى تشترك في بعض الحالات مع مقدرات المربعات الصغرى، آي نتحصل على مقدرات الإمكانية العظمى تتطابق مع مقدرات المربعات الصغرى العادية أن مقدرات ألا مكانيه العظمى في مثل نموذج الانحدار البسيط ما هي آلا مقدرات المربعات الصغرى ، لكن في نماذج أخرى اكثر تعقيدا نرى أن مقدرات الإمكانية العظمى تختلف عن مقدرات المربعات الصغرى العادية.

<u>مقدرات الإمكانية العظمى</u>: هي تلك القيم التي تعظم إمكانية (الاحتمال) الحصول على العينة المشاهدة والمستخدمة في التقدير.

طريقة الإمكانية العظمى: نبدأ بنموذج الانحدار البسيط:

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

الخطوة الأولى : افتراض حول شكل التوزيع الاحتمالي الخاص بالعناصر العشوائية. افترضنا أن المتغير العشوائي يتوزع توزيع طبيعيا.

الخطوة الثانية: تحديد دالة الاحتمال أو دالة الكثافة الاحتمالية Probability Density Function الخاصة بالعناصر العشوائية.

الخطوة الثالثة: استخلاص دالة الاحتمال الخاصة بالمتغير التابع، حيث أن المتغير التابع يعتمد على المتغير العشوائي. ثم يعمم على العينة.

الخطوة الرابعة: تعظم تلك الدالة بالنسبة لقيم المعالم فنتحصل على مقدرات الإمكانية العظمى.

1- دالة الكثافة الاحتمالية للعنصر العشوائي u هي دالة توزيع طبيعي معروفه تكتب على النحو التالي:

$$\int (c_t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u-0}{\sigma^2}\right\}}$$

حيث أن π=-3.14 و e=2.718

الجزء الثاني من المعادلة هو مربع $u^{1/2}$ مضروب في المتغير العشوائي مطروح من الوسط ومقسوم على الانحراف المعياري . وبالتعويض بالمتوسط الصفري يمكن كتابتها كما يلي:

$$\int (c_t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

2- تحدد دالة الاحتمال المشتركة join Density Function آي دالة العناصر العشوائية والتي تكون عادة بعدد n $e_1, e_2, \ldots\ldots e_n$ وحيث أن العنصر العشوائية غير مرتبطة مع بعض يمكن كتابة دالة الاحتمال المشتركة كما يلي:

$$\int (u_i \ldots\ldots\ldots u_n) = \int (u_1) \int (u_1) \ldots\ldots \int (u_n)$$

تعوض الدوال بقيمتها من معادلة دالة الكثافة الاحتمالية للعشوائي

$$\int (u_t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}} \times \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}} \ldots\ldots \frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}} e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

$$= \left\{(2\pi\sigma^2)_{1/2}\right\}^n e^{-1/2\left\{\frac{\sum u_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

3- استخلاص دالة الاحتمال الخاصة بالمتغير التابع Y، حيث أن المتغير التابع يعتمد على المتغير العشوائي. ثم يعمم على العينة.

حيث أن $u_i = Y - \{\alpha + \beta_i X\}$

نعوض بقيمة u من دالة الإمكانية العظمى:

$$= \left\{(2\pi\sigma^2)_{1/2}\right\}^n e^{-1/2\left\{\frac{\sum (y-\alpha-\beta X)_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

تحولنا عن البواقيu إلى دالة يظهر فيها التابع Y وبحكم ظهور على الجانب الأيمن من المعادلة. تعتبر هذه المعادلة دالة الاحتمال المشتركة وتسمى بدالة الإمكانية العظمى ويرمز لها بالرمز ℓ

$$\ell = f(Y_1).f(Y_2)\dots f(Y_{ni})$$

ومن دالة الاحتمال المشتركة يمكن الحصول مقدرات الإمكانية العظمى بهذه المعادلة. المطلوب هو أيجاد القيم للمقدرات التي تعظم احتمال العثور على القيم الخاصة بـ Y. آي أن المعيار في دالة الإمكانية العظمى يتطلب تعظيم دالة ألا مكانيه العظمى. لتعظيم أي دالة من الدوال يجب أجراء التفاضل حسب متطلبات شرط الدرجة الأولى ومساواته بالصفر. وحيث أن المعادلة معقده لذل تستخدم الخاصية الرياضية التي تقول أن القيمة العظمى لدالة من الدوال أو قيمة المعلمة التي تحقق القيمة العظمى لدالة من الدوال هي نفس القيمة التي تحقق القيمة العظمى للدالة الرئيسية .

للتبسيط نأخذ لوغاريتم الدالة

$$\ell = f(Y_1).f(Y_2)\dots f(Y_{ni})$$

$$L\ell = \sum ln f(Y_1)$$

$$\ell = \left\{(2\pi\sigma^2)_{1/2}\right\}^n e^{-1/2\left\{\frac{\sum (y-\alpha-\beta X)_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

$$ln\,\ell = -\frac{n}{2} ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum (y-\alpha-\beta X)^2$$

$$ln\,\ell = -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{n}{2} ln\,\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma}\sum (y-\alpha-\beta X)^2$$

نلاحظ وجه التبسيط انه بينما كانت معالم تظهر $\alpha\ \beta$ في الأس لـ u الآن تظهر $\alpha\ \beta$ كدالة خطية وذلك يسهل عملية أجراء التفاضل.

الغرض من كتابة المعادلة على الصورة المختلفة هو عزل التبـاين σ^2 عن الثابت (2π). ومن ذلك يمكن التوصل إلـى مقدرة معلمـة التبـاين لهذا تعتبـر طريقـة الإمكانيـة افضـل مـن طريقـة المربعات الصغرى لأنها تعطينا بالأضافه إلى مقدرة $\alpha\ \beta$ تعطينا مقدرة σ^2 .

إذا للحصول على مقدرات ألا مكانيه العظمى يتم أجراء التفاضل الذي يعظم دالة الإمكانية اختيار المقدرات التي تعظم الدالة.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\sigma} \sum 2(y - \alpha - \beta X)(-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma} \sum 2(y - \alpha - \beta X)(-X_t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2\sigma} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum (y - \alpha - \beta X)^2$$

للحصـول علـى المجاهيـل نحـل المعـادلات الـثلاث ومســاواتها بالصـفر. يمكـن الحصـول علـى المعادلات التالية:

$$\sum Y_i = -\tilde{\alpha} n + \tilde{\beta}(\sum X_i)$$

$$\sum X_i Y_i = \tilde{\alpha}(\sum X_i) + \tilde{\beta}(\sum X_i^2) \qquad 9.2$$

هذه المعادلتين هي نفس المعادلتين التي تم الحصول عليها في طريقة المربعات الصـغرى العاديـة أي إن الإمكانية العظمى تقود إلي نفس المعادلات الطبيعية التـي تم الحصـول عليهـا فـي طريقـة م ص ع ولكن استخدمنا رمـوز جديده لمقدرات الإمكانيـة العظمـي أي المقدرات التـي تعظـم دالـة الإمكانية: $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha},$

وبحل المعادلتين أما بطريقة المصفوفات أو بالمعادلات الآنية أو بطريقة Cramer وباتباع أي من هذه الطرق نتحصل على صيغة خاصة ب مقدرات الإمكانية العظمى:

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\tilde{\alpha} = \overline{Y} - \tilde{\beta}\overline{X}$$

وهي نفس صيغة مقدرة المربعات الصغرى العادية. في حالة النموذج الخطي البسـيط. أما في النماذج المتعددة فلا تنطبق المقدرات.

ومن ميزات مقدرات الإمكانية العظمى الحصول مقدرة التباين σ^2 ويتم العثور من المعادلة رقم 3 .

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum Y_i - \alpha - \beta X)^2 = 0$$

وبحل المعادلة نتحصل $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum (Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} X_i)^2$

وهذه هي مقدرة الإمكانية العظمى للتباين ويمكن إن تكتب على النحو التالي:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum u^2$$

تتميز هذه المقدرة بأنها متحيزة ولا تتميز بالكفاءة.... ولا تستخدم في العينات الصغيرة ولكن إذا كانت العينة كبيرة يمكن استخدام مقدرة الإمكانية العظمى للتباين.

10.2 خصائص مقدرات الإمكانية العظمى:

ويشار أليها بالخصائص التقاربية وهي الخصائص التي تتحقق إذا كان حجم العينة كبير ، ولكن في الاقتصاد من الصعب الحصول على عينات كبيرة الحجم وعادة تكون سلاسل زمنية من 20 إلى 25 وبالتالي العينات المستخدمة في الاقتصاد كلها صغيرة الحجم ولا تنطبق عليها الخصائص التقاربية.

الخصائص التقاربيه Asmpotitic result لمقدرات الإمكانية العظمى كما يلي:

1- عدم التحيز التقاربي: إذا زاد حجم العينة أي كلما اقتربت $n \to \infty$ كلما تلاشى التحيز الموجود بالعينة الصغيرة. فعلى سبيل المثال مقدرة التباين متحيزة في العينات الصغيرة ولكن في العينات الكبيرة يختفي ذلك التحيز. أي إن وسط توزيعها عيناتها الاحتمالي لا يساوي القيمة الحقيقية أما إذا ارتفع حجم العينة فن التوزيع الخاص بمقدرات العينات المختلفة يقترب من التوزيع الطبيعي وتكون القيمة المتوقعة في الوسط. أي غير متحيزة.

2- الكفاءة التقاربية (أدنى تباين وأعلى دقة) :

ينخفض التباين وينخفض التحيز إذا وجد بزيادة حجم العينة وتزداد دقة المقدرات.

3- الاتســـــاق Consistency.

إذا زاد حجم العينة إلي لانهاية فان التوزيع الاحتمالي للمعلمة المقدرة ينهار على القيمة الحقيقية للمعلمة سواء كانت مقدرة الميل أو القاطع أو التباين.

الملخص:

الفروض الاساسيه توضح إن نموذج الانحدار خطي بخطأ معياري ذا وسط صفري وغير مرتبطة مع المتغيرات المفسرة ويتميز بتباين ثابت ، يتوزع توزيعا طبيعيا.

تتميز مقدرات م ص ع بعدم التحيز وأدنى تباين. وخطية .

تمارين

1-عرف المصطلحات التالية:
1- الخطأ المعياري.
2- التباين.

2-عدد الافتراضات اللازمة لتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية.

3- للمشاهدات التالية
$X=\{3,2,1,,-1,0\}$ و $Y=\{5,2,3,2,-2\}$
أ- أوجدي القيم التاليه

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2,\ \sum_{i=1}^{5} x_i y_i,\ \sum_{i=1}^{5} x_i,\quad \sum_{i=1}^{5} y_i,\quad \bar{X}, \bar{Y},$$

ب-ارسم شكل الانتشار الخاص بالمتغيرين X,Y
ج-أوجد الخط الذي يمثل العلاقة $Y=a+bX$ مع الرسم.
د-مالمقصود بـ a,b
هـ- حدد متوسط Y ومتوسط X على الرسم.

4- حدد دالة الانتاج التي تعبر عن العلاقة بين كمية الانتاج وعنصر الانتاج العمل حسب البيانات المعطاة في الجدول التالي:

المشاهدات	Q	L
1	0.58	1
2	1.10	2
3	1.20	3
4	1.30	4
5	1.95	5
6	2.55	6
7	2.60	7
8	2.90	8
9	3.45	9
10	3.50	10
11	3.60	11
12	4.10	12
13	4.35	13
14	4.40	14
15	4.50	15

اذا افترضنا ان البيانات يمكن وصفها بعلاقة خطية تحت الفروض الخمسة. حددي تلك العلاقة . واشرحي العلاقة الاقتصادية التي تربط المتغيرات حسب المعادلة. مع رسم شكل الانتشار والخط المربعات الصغرى العدية.

تمرين :

جدول : حددي نتائج الانحدار للعلاقة بين الكمية المطلوبة لسلعه والسعر كما يلي

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

من البيانات التالية

السعر X	الكميه Y						
100	55						
90	70						
80	90						
70	100						
70	90						
70	105						
70	80						
65	110						
60	125						
60	115						
55	130						
50	130						

1- حددي معاملات النموذج. مع رسم شكل الانتشار وخط الانحدار

2- قومي ببناء فترة الثقه لمعامل الميل وحددي فرضية العدم و نتائج اختبار t,F. مستخدمة 5% مستوى الثقة.

3- حددي معامل التحديد R^2