القسم الثاني: الجبر الخطي (Linear Algebra)

الفصل السادس

جبر المصفوفات Matrix Algebra

تعريف

ليكن K حقلاً تبديلياً وليكن لدينا العددين الطبيعيين $p, n \geq 1$ نسمي مصفوفة بأمثال من الحقل K، التطبيق $A : \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \to K;\ (i, j) \to a_{ij}$ ونرمز لهذا التطبيق بـ :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

حيث a_{ij} يوجد في نقطة تقاطع السطر رقم (i) مع العمود رقم (j). ونرمز لمجموعة المصفوفات فوق الحقل K بـ $M_{n \times p}(K)$ و التي تمثل مجموعة المصفوفات ذات $n \times p$ عنصراً من k ونقول إن A هي مصفوفة من الدرجة $n \times p$ أو نقول أن A هي مصفوفة بـ n سطراً و p عموداً من عناصر الحقل k.

ملاحظة

من أجل $i = 1, \dots, n$ فإنها نرمز بـ $R_i(A) = (a_{i1}, \dots, a_{ip}) \in K^n$ للشعاع السطري رقم (i) من المصفوفة A.

ومن أجل $j = 1, \dots, p$ فإننا نرمز بـ $C_j(A) = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \in K^n$ للشعاع العمودي رقم j من المصفوفة A.

1. العمليات على المصفوفات

1- المصفوفات المتساوية و جمع المصفوفات والمصفوفات الأولية

لتكن A,B مصفوفتين من $M_{n\times p}(K)$ حيث $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$

- $A=B \quad \Leftrightarrow \quad \forall \quad (i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p; \quad a_{ij}=b_{ij}$
- $A+B=(C_{ij})$ هي مصفوفة من $M_{n\times p}(K)$ وحيث

$$\forall\,(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

- إذا كان $\lambda\in K$ فعندئذ نعرف $\lambda A\in M_{n\times p}(K)$ بالشكل التالي:

$$\lambda.A=(d_{ij});\quad \forall \quad (i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\quad d_{ij}=\lambda.a_{ij}$$

- المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي كل عناصرها الحيادي 0_k أي أن:

$$0_{n\times p}=(f_{ij});\quad \forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\quad f_{ij}=0_K$$

مثال

لتكن A و B مصفوفتين من الدرجة 3×4 حيث:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\5&3&0&1\\9&2&1&6\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad A+B=\begin{pmatrix}2&4&3&7\\7&9&7&9\\18&12&12&18\end{pmatrix}$$

$$2A=\begin{pmatrix}2&4&0&6\\10&6&0&2\\18&4&2&12\end{pmatrix}\quad\&\quad 2A+B=\begin{pmatrix}3&6&3&10\\12&12&7&10\\27&14&13&24\end{pmatrix}$$

$$0A=0B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

تعريف المصفوفة الأولية

نعرف المصفوفة الأولية $E_{kl} \in M_{n\times p}(K)$ حيث $k \in \mathbb{N}_n, l \in \mathbb{N}_p$ بالشكل التالي:

$$E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

أي هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفاراً ما عدا العنصر الذي يقع في السطر k والعمود l حيث هذا العنصر يساوي 1.

ملاحظة

δ_{kl} هو ما يسمى برمز كرونيكر ويعرف كما يلي $\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$

مبرهنة (1)

إن $(M_{n\times p}(K),+,.)$ هو فضاء شعاعي منتهي ذو $n\times p$ بعداً وأساسه الجملة المكونة من المصفوفات E_{kl} حيث $(k,l) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$.

الإثبات:

إثبات إن $(M_{n\times p}(K),+,.)$ فضاء شعاعي ينتج مباشرة من تعريف الفضاء الشعاعي. وهو منتهي البعد لأن أساسه هي الجملة المكونة من المصفوفات E_{kl}. ويمكن إثبات ذلك بسهولة

$$\forall \quad A \in M_{n,p}, \quad A = \sum_k \sum_l a_{kl} E_{kl}$$

أي هي مولدة وهي حرة لأن بفرض أن $(\lambda_{kl}) \in K^{n\times p}$ فإن $\sum_k \sum_l \lambda_{kl} E_{kl} = 0_{n\times p}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1p} \\ & & \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_{kl} = 0, \forall (k,l) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$$

وبالتالي مجموعة المصفوفات الأولية تشكل أساساً أي الفضاء $M_{n,p}(K)$ بعده $n\times p$.

توضيح:

ليكن $A \in M_{2\times 2}(R)$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 9\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+9\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 9\end{pmatrix}=A$$

إذن $E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

هي جملة مولدة وكذلك هي حرة لأن $\lambda_{11}E_{11}+\lambda_{12}E_{12}+\lambda_{21}E_{21}+\lambda_{22}E_{22}=0_{22}$

$$\Rightarrow \lambda_{11}=\lambda_{12}=\lambda_{12}=\lambda_{22}=0$$

2- منقول مصفوفة

لتكن $A \in M_{n\times p}(K)$ نسمي المصفوفة $^{t}A \in M_{p\times n}(K)$ المعرفة بالشكل التالي $^{t}A=(\tilde{a}_{ij})$ منقول المصفوفة A حيث $\forall (i,j)\in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p ; \tilde{a}_{ij}=a_{ji}$. إن التطبيق $T: M_{n\times p}(K)\to M_{p\times n}(K); A\to {}^{t}A$ هو تشاكل تقابلي.

مثال

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 9\end{pmatrix}$ فإن $^{t}A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 9\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 9 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow {}^{t}B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 9\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

ملاحظة

نسمي مصفوفة سطرية (أو مصفوفة عمودية) كل عنصر من $M_{1\times p}(K)$ (أو من $M_{n\times 1}(K)$) على الترتيب.

3- جداء المصفوفات (Matrix Multiplication)

لتكن $A=(a_{ij})\in M_{n\times m}(K)$ و $B=(b_{jk})\in M_{m\times p}(K)$. نعرف جداء المصفوفتين B,A ونرمز له بـ AB بالشكل التالي: $AB=(c_{ij})\in M_{n\times p}(K)$ حيث:

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

مثال

لتكن $X\in M_{1\times3}(\mathbb{R}),Y\in M_{3\times1}(\mathbb{R})$ حيث $X=(a,b,c),Y={}^t(x,y,z)$ عندئذٍ

$$XY=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=ax+by+cz\in\mathbb{R}$$

أي جداء XY هو عدد ثابت.

أما YX فتحسب كما يلي $YX=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa & xb & xc\\ ya & yb & yc\\ za & zb & zc\end{pmatrix}\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

لاحظ أن: $XY\neq YX$

مثال

لتكن $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ عندئذٍ

$$AB=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}$$

لاحظ أن: $BA=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b & 2a+4b\\ c+3d & 2c+4d\end{pmatrix}$

لاحظ أيضاً أنه ليس من الضروري أن تكون $AB=BA$. يوجد الكثير من القيم لـ a,b,c,d بحيث يكون $AB\neq BA$.

خواص جداء المصفوفات (Matrix Multiplication)

ملاحظة

إذا كانت $A\in M_{n\times m}(K),\quad B\in M_{m\times p}(K)$ فيمكن أن نكتب AB كما يلي:

$$C=AB=\begin{pmatrix} R_1(A)C_1(B) & \cdots & R_1(A)C_p(B) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n(A)C_1(B) & \cdots & R_n(A)C_p(B) \end{pmatrix}$$

مبرهنة (2)

إذا كانت $A\in M_{n\times m}(K),\quad B\in M_{m\times p}(K)$ فإن $AB=\left(AC_1(B)\ldots AC_p(B)\right)$

الإثبات:

$$AC_j(B)=\begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix} C_j(B)=\begin{pmatrix} R_1(A)C_j(B) \\ \vdots \\ R_n(A)C_j(B) \end{pmatrix};1\le j\le p.$$

نتيجة (1)

1- إذا كانت $B\in M_{m\times 1}(k)$ أي $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ فإن $AB=b_1C_1(A)+\cdots+b_mC_m(A)$.

2- إذا كانت $A\in M_{1\times m}(k)$ أي $A=(a_1,\ldots,a_n)$ فإن $AB=a_1R_1(A)+\cdots+a_mR_m(A)$

الإثبات:

1- لاحظ أن

$$\begin{aligned} AB&=\begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+\cdots+a_{1m}b_m \\ \vdots \\ a_{n1}b_1+\cdots+a_{nm}b_m \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} a_{11}b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1m}b_m \\ \vdots \\ a_{nm}b_m \end{pmatrix} \\ &=b_1C_1(A)+\cdots+b_mC_m(A) \end{aligned}$$

2- يبرهن بطريقة مشابهة.

مبرهنة (3)

لتكن $A\in M_{n\times m}(K)$ و $B\in M_{m\times p}(K)$ و $C\in M_{p\times q}(K)$ عندئذ:

1- $A(BC)=(AB)C$ (الجداء تجميعي).

2- $\forall \lambda \in k; \quad \lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$

3- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (الجداء توزيعي على الجمع).

4- $0_k A=0_{n\times m}, \quad A0_{m\times p}=0_{n\times p}$

الإثبات:

إن $A(BC)=A\left(B\left(C_1(C),...,C_q(C)\right)\right)$ حيث $C_i(C)$ هو العمود رقم j من المصفوفة C. استناداً إلى المبرهنة (2) نجد أن $A(BC)=A\left(BC_1(C),...,BC_q(C)\right)$

إذن $A(BC)=\left(A\left(BC_1(C)\right),...,A\left(BC_q(C)\right)\right)$. بما أن $C_j(C)=\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix}$ عندئذ:

$BC_j=c_{1j}C_1(B)+\cdots+c_{pj}C_p(B), j=1,\cdots,q$. حسب النتيجة (1) نجد أن:

$$\begin{aligned} A\left(BC_j\right) &= A\left(c_{1j}C_1(B)+\cdots+c_{pj}C_p(B)\right) \\ &= c_{1j}AC_1(B)+\cdots+c_{pj}AC_p(B) \\ &= \left(AC_1(B)+\cdots+AC_p(B)\right)C_j=(AB)C_j \end{aligned}$$

إذاً $A(BC)=(AB)C$. إن إثبات بقية الخواص ينتج مباشرة من التعاريف.

مبرهنة (4)

لتكن $A\in M_{n\times m}(K)$ و $B\in M_{m\times p}(K)$ عندئذ

1- ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

2- ${}^t\left({}^tA\right)=A$

3- $\forall(\lambda,\mu)\in K^2, {}^t(\lambda A+\mu B)=\lambda\,{}^tA+\mu\,{}^tB$

الإثبات سهل ويترك كتمرين.

2. المصفوفات المربعة (Square Matrices)

تعريف المصفوفات المربعة

نسمي مصفوفة مربعة من الدرجة n كل مصفوفة من الدرجة $n\times n$ بعناصر من الحقل K.

نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة بـ $M_n(K)$. إذا كانت $A\in M_n(K)$ فإنها تُمثل كما يلي

$$A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ حيث } \forall(i,j)\in\mathbb{N}_n^2,\ a_{ij}\in K$$

نسمي العناصر من الشكل $\left(a_{ii}\right)_{i\in\mathbb{N}_n}$ القطر الرئيسي.

تعريف المصفوفة الواحدية

إن المصفوفة الواحدية هي المصفوفة $I_n\in M_n(K)$ والعرفة بالشكل التالي:

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

مبرهنة (5)

إن البنية $\left(M_n(K),+,\times\right)$ المزودة بقانوني تشكيل داخليين $(+),(\times)$ على $M_n(K)$ (جداء و جمع المصفوفات) هي حلقة حيث $I_n\in M_n(K)$ هو الحيادي بالنسبة للقانون الداخلي $(.)$.

مبرهنة (6)

إن البنية $\left(M_n(K),+,.,\times\right)$ تشكل جبراً فوق الحقل K وحيث $(+),(\times)$ هما قانوني تشكيل داخليين على $M_n(K)$ و $(.)$ هو قانون تشكيل خارجي معرف كما يلي

$$(.):K\times E\to E;\ (\lambda,x)\to\lambda.x=\lambda x$$

أثر مصفوفة (Matrix Trace)

تعريف: لتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة مربعة. نعرف أثر المصفوفة A ونرمز له بـ $Tr(A)$ بالعلاقة التالية $Tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

مثال: إن أثر المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

هو $Tr(A) = 1 + 6 + 11 = 18$

مبرهنة (7)

لتكن $A, B \in M_n(K)$ فإن:

1- $Tr(A) = Tr({}^tA)$.

2- $\forall \lambda \in k ; Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$

3- $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

4- $Tr(AB) = Tr(BA)$.

الإثبات:

من 1 ـ 3 واضح ومباشر من التعاريف.

4 حسب تعريف جداء المصفوفات فإن عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $C = AB$ تعطى بالشكل التالي $i = 1, \ldots, n \quad ; \quad C_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$ وبالتالي:

$$Tr(C) = Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} C'_{kk}$$

حيث $C' = BA$ و $c'_{kk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$ إذن $Tr(C') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = Tr(C)$ أي أن $Tr(AB) = Tr(BA)$.

3- قواعد الحساب في حلقة المصفوفات $M_n(K)$

1- الحلقة $M_n(K)$ غير تبديلية.

مثال

لتكن $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ & $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ لاحظنا أنه ليس من الضروري أن يكون $AB=BA$

2- الحلقة $M_n(K)$ ليست تامة أي $AB=0 \not\Rightarrow (A=0)\vee(B=0)$

مثال

لاحظ أن $B=\begin{pmatrix}0&0\\2&5\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ علماً أن $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

3- بما أن $M_n(K)$ هي حلقة بالنسبة للقانون الداخلي $(+)$ جمع المصفوفات والقانون الخارجي $(\times)$ فإننا نستطيع تطبيق القوانين والصيغ المستخدمة في الحلقات.

مثلاً: إذا كان $A,B\in M_n(K)$. إذا كان $AB=BA$ وليكن $p\in N$ فإن:

$$(A+B)^p=\sum_{k=0}^{p}C_p^k A^k B^{p-k}$$

$$A^p-B^p=(A-B)(A^{p-1}+A^{p-2}B+\cdots+A^{p-1})$$

$$(I_n-A^p)=(I_n-A)(I_n+A+A^2+\cdots+A^{p-1})$$

ملاحظة

نستخدم العلاقة الأخيرة في حالة حساب قوى مصفوفة A وخصوصاً عندما $A^p=0$. ونسمي مصفوفة معدومة القوة إذا وجد $p\in\mathbb{N}$ فإن $A^p=0$.

مثال

لتكن لدينا المصفوفة $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. احسب A^2,A^3 ومن ثم استنتج A^n حيث $n\in N$.

الحل:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}={}^tA$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

لاحظ أن $A^4 = I_3.A = A$ و $A^5 = A^4.A = A^2 = {}^tA$ وأن $A_6 = A_5.A = {}^tA = I_3$ وهكذا..

إذن نستطيع أن نستنتج أن العلاقات التالية التي تعطى A^n :

$$A^n = A^{3p} = I_3 \quad ; p = 1,2,\dots$$

$$A^n = A^{3p-1} = A^2 = {}^tA; \quad p = 1,2,\dots$$

$$A^n = A^{3p-1} = A^3 = I_3; p = 1,2,\dots$$

3. بعض المصفوفات الشهيرة

1- المصفوفات القطرية (Diagonal Matrices)

وهي المصفوفات من $M_n(K)$ الشكل:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = Diag(d_1,\dots,d_n); (d_1,\dots,d_n) \in K^n$$

2- المصفوفات السلمية (Scalar Matrices)

هي المصفوفات المربعة من $M_n(K)$ الشكل:

$$M = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad ; \lambda \in K$$

مبرهنة (8)

إن مجموعة المصفوفات السلمية ومجموعة المصفوفات القطرية هما جبرين جزئيين من الفضاء $M_n(K)$.

بالإضافة إلى أن مجموعة المصفوفات السلمية تشاكل تقابلياً الفضاء الشعاعي $(K,+,\times)$.

ملاحظة

إن جداء مصفوفتين قطريتين هو مصفوفة قطرية نحصل عليها كما يلي:

$$Diag(d_1,\dots,d_n)Diag(d`_1,\dots,d`_n) = Diag(d_1d`_1,\dots,d_nd`_n)$$

ومنه $(Diag(d_1,\dots,d_n))^2 = Diag(d_1^2,\dots,d_n^2)$.

i- المثلثية العليا (Upper Triangular matrix):

وهي المصفوفة المربعة الشكل

$$\forall(i,j)\in N_n^2;\quad u_{ij}=0; i>j \Leftrightarrow U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

ii- المثلثية الدنيا (Lower Triangular Matrix):

هي المصفوفة المربعة من الشكل:

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \quad \forall(i,j)\in N_n^2; l_{ij}=0; i<j$$

4- المصفوفات المتناظرة والمصفوفات التخالفية (Symmetric, Skew- symmetric matrices)

نقول عن المصفوفة المربعة $A\in M_n(K)$ أنها متناظرة إذا وفقط إذا كان $A={}^tA$ ونرمز لمجموعة المصفوفات المتناظرة بـ $S_n(K)$.

ونقول عن المصفوفة المربعة $A\in M_n(K)$ أنها تخالفية إذا وفقط إذا كان $A=-{}^tA$. ونرمز لمجموعة المصفوفات التخالفية بـ $A_n(k)$.

إذا كانت مصفوفة متناظرة فهذا يعني أن:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

أي أن: $\forall(i,j)\in N_n^2; a_{ij}=a_{ji}$

مثال

إن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$ هي مصفوفة متناظرة لأن $^{t}A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}=A$

مبرهنة (9)

إن مجموعة المصفوفات المتناظرة $S_n(k)$ هي فضاء شعاعي جزئي من $M_n(K)$ بعده $\frac{n(n+1)}{2}$. إن مجموعة المصفوفات التخالفية $A_n(K)$ هي أيضاً فضاء جزئي من $M_n(K)$ بعده $\frac{n(n-1)}{2}$ وحيث $M_n(K)=S_n(K)\oplus A_n(K)$

الإثبات:

من السهل جدا إثبات أن كل من $S_n(K), A_n(K)$ هو فضاء جزئي من $M_n(K)$ وذلك واضح من تعريف من هاتين المجموعتين.

لتكن الجملة $(E_{ij})_{(ij)\in N_n^2}$ التي تشكل الأساس القانوني للفضاء $M_n(K)$. عندئذ الجملة $S=(S_{ij})_{(ij)\in Tn}$ وحيث $T_n=\{(i,j)\in N_n^2; i\le j\}$ و $\forall(i,j)\in T_n; S_{ij}=\begin{cases}E_{ii}, & i=j\\ E_{ij}+E_{ji} & : i\ne j\end{cases}$

إن S تشكل أساساً للفضاء $S_n(K)$ ولدينا $\dim(S_n(K))=card(T_n)=\frac{n(n+1)}{2}$.

الجملة $S'=(S'_{i,j});(i,j)\in T'_n$ حيث $T'_n=\{(i,j)\in N_n^2; i<j\}$

و $;1\le i<j\le n \quad S'_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$ تكون أساساً للفضاء $A_n(K)$ وبالتالي $\dim A_n(K)=Card(T'_n)=\frac{n(n-1)}{2}$. أخيراً لنفرض أن $M\in S_n(K)\cap A_n(K)$ أي $M={}^tM=-{}^tM$ إذن $M=0_n$ ومن جهة أخرى فإن

$\forall M\in M_n(k); \quad M=\frac{1}{2}(M+{}^tM)+\frac{1}{2}(M-{}^tM)$ يمكن التحقق من ذلك بسهولة وكذلك يمكنك إثبات أن $\frac{1}{2}(M-{}^tM)\in A_n(K)$ وأن $\frac{1}{2}(M+{}^tM)\in S_n(K)$ إذن نستنتج أن $M_n(K)=S_n(K)\oplus A_n(K)$.

5- المصفوفات القلوبة (Invertible Matrix)

تعريف

لتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة مربعة. نقول أن A قلوبة إذا وفقط إذا وجدت المصفوفة $B \in M_n(K)$ بحيث يكون $AB = BA = I_n$ ونرمز لمجموعة المصفوفات القلوبة بـ $GL_n(k)$

مبرهنة (10)

إن البنية $(GL_n(k),\times)$ هي زمرة غير تبديلية وعنصرها الحيادي هو المصفوفة I_n.

الإثبات:

واضح ومباشر من تعريف $GL_n(k)$.

مثال

لتكن لدينا $A, B \in M_n(K)$ ولنفرض أن $AB = 0_n$. أثبت أن إذا كانت A قلوبة فإن $B = 0_n$.

الحل:

إن A قلوبة عندئذٍ يوجد حسب التعريف مصفوفة $A' \in M_n(K)$ حيث $AA' = A'A = I_n$ إذن $A'(AB) = A'0_n$ و بالتالي $I_n B = 0_n$ لأن ضرب المصفوفات عمليـة تجميعيـة. إذن $B = 0_n$.

مبرهنة (11)

لتكن $A \in M_n(K)$. الخواص التالية متكافئة:

1- $A \in GL_n(k)$

2- A قابلة للقلب من اليسار أي: $\exists B \in M_n(K); \quad BA = I_n$

3- A قابلة للقلب من اليمين أي: $\exists B \in M_n(K); \quad AB = I_n$

4- $\forall X \in M_{n\times 1}(K); \quad AX = 0_{n1} \Rightarrow X = 0_{n1}$

5- $rg(A) = n$

4. مصفوفة تطبيق خطي (The matrix of linear map)

تعريف

ليكن لدينا الفضاء الشعاعي E منتهي البعد على الحقل K. لتكن $e=(e_1,\dots,e_n)$ أساس لـ E. ليكن $x\in E$ عندئذ $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$ نسمي مصفوفة الشعاع x بالأساس e المصفوفة من القياس $n\times 1$

$$Mat_e(x)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in M_{n\times 1}(K)$$

تعريف

لتكن $S=(x_1,\dots,x_p)$ جملة مكونة من p شعاع من الفضاء E عندئذٍ $\forall j=1,\dots,p;\ x_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}e_i$ نُسمي مصفوفة الجملة S بالجملة e المصفوفة من القياس $n\times p$ والمعرفة كما يلي:

$$Mat_e(S)=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}\in M_{n\times p}(K)$$

تعريف

إذا كان F,E فضائين شعاعيين معرفين على الحقل K وحيث $\dim F=n,\dim E=P$. ولتكن $e=(e_1,\dots,e_p)$ أساساً لـ E و $f=(f_1,\dots,f_n)$ أساس لـ F. ليكن $u\in L(E,F)$ تطبيق خطي. نسمي مصفوفة التطبيق الخطي u بالنسبة للأساسين f,u المصفوفة

$$Mat_{e,f}(u)=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}\in M_{n\times p}(k)$$

حيث $u(e_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}f_i;\quad \forall j\in N_n$ وبكلام آخر $Mat_{e,f}(u)$ هي مصفوفة الجملة $u(e)=(u(e_1),\dots,u(e_p))$

مبرهنة (12)

ليكن E فضاء شعاعي منتهي البعد على الحقل K و $\dim E = p$ أساسه $e = (e_1, \dots, e_{p})$ و F فضاء شعاعي منتهي البعد على الحقل K و $\dim F = n$ أساسه $f = (f_1, \dots, f_n)$ عندئذٍ التطبيق $\phi_{e,f} : L(E,F) \to M_{n\times p}(K) ; u \to Mat_{e,f}(u)$ هو تشاكل فضاءات شعاعية تقابلي.

أي هو تطبيق خطي تقابل.

مثال

ليكن $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل التالي $u(x,y,z) = (x-y,z)$ $\forall (,x,y,z) \in R^3;$. لتكن $e = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ و $f = \{(1,2),(2,1)\}$ أساسين لكل من $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ على الترتيب. لاحظ أن:

$$u(e_1) = u(1,1,0) = (0,0) = 0\beta_1 - 0\beta_2$$

$$u(e_2) = u(0,1,1) = (-1,1) = \beta_1 - \beta_2$$

$$u(e_3) = u(1,0,1) = (1,1) = \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2$$

ومنه $Mat_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

5. رتبة مصفوفة (Rank of Matrix)

تعريف

لتكن $A \in M_{n\times p}(K)$ وليكن $C_1(A), \dots, C_p(A)$ أعمدة هذه المصفوفة. نسمي رتبة المصفوفة A ونرمز لذلك بـ $rg(A)$ رتبة الجملة $C = (C_1(A), \dots, C_p(A))$ أي أن

$$rg(A) = \dim vect(C)$$

ملاحظة

إن العمليات التالية:

1- التبديل بين أعمدة مصفوفة أو بين أسطرها. نرمز لذلك بـ $C_i \rightleftarrows C_j ; (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$

2- عملية ضرب عمود (أو سطر) بسلمي و إضافته إلى عمود (أو سطر) أخر. نرمز لذلك بـ $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j ;\ (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \lambda \in K$ ، أي نقوم بتبديل العمود C_i بالعمود $C_i + \lambda C_j$ و $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \lambda \in K$.

تسمى العمليات الأولية على المصفوفات.

مثال: أوجد رتبة المصفوفة A حيث:

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -11 & 11 & 11 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$a_1,\ \ a_2-\frac{1}{2}a_1,\ a_3+a_1,\ a_4+a_2-\frac{1}{2}a_1+a_3,\ a_5+a_2\frac{1}{2}a_1+a_3$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & +6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

لنفرض أن:

$$b_1=a_1 \quad b_2=a_2-\frac{1}{2}a_1, \quad b_3=a_3+a_1 \quad b_4=a_4+a_3+a_2-\frac{1}{2}a_1$$

$$b_5=a_5+a_3+a_2-\frac{1}{2}a_1$$

نقوم بالعمليات الأولية التالية $b_5 \quad b_4+2b_2 \quad b_3-b_2+b_1 \quad b_2 \quad b_1$ ونحصل على

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثم نجري بالعمليات الأولية $b_5-\frac{6}{5}(b_4+2b_2) \quad b_4+2b_2 \quad b_3-b_2+b_1 \quad b_2 \quad b_1$ فنجد

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن: $rg(A)=4$

ملاحظة

نلاحظ أن رتبة مصفوفة هو عدد الأعمدة أو الأسطر المستقلة خطياً.

مبرهنة (13)

ليكن $u:E\to F$ تطبيق خطي حيث F,E فضائين شعاعيين فوق الحقل K وحيث $e=(e_1,\dots,e_p)$ أساس E و $f=(f_1,\dots,f_n)$ أساس F ولتكن $A=Mat_{e,f}(u)$

عندئذٍ $rg(u)=rg(A)$

الإثبات:

لدينا $rg(u)=\dim \mathrm{Im}(u)=rg(u(e_1),\dots,u(e_p))$

وبما أن f أساس لـ F فإن التطبيق $\varphi_f:M_{n\times1}(k)\to F;Y=\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{bmatrix}\to\varphi_f(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_i f_i$ هو تقابل خطي ويحقق ما يلي $\varphi_f(C_j(A))=u(e_j)\quad;\quad\forall j\in N_p$

إذن:

$$\begin{aligned} rg(u)&=rg\left[\varphi_f\left(C_1(A)\right),\dots,\varphi_f\left(C_p(A)\right)\right]\\ &=rg\left(C_1(A),\dots,C_p(A)\right)=rg(A)\end{aligned}$$

نتيجة (2)

إذا كانت $A\in M_{n\times p}(K)$ فإن $rg(A)=rg({}^tA)$

6. تغيير الأساس

تعريف

ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد فوق الحقل K وليكن $e=(e_1,\dots,e_n)$ أساساً للفضاء E و $f=(f_1,\dots,f_n)$ أساساً آخر للفضاء E. نسمي مصفوفة الانتقال من e إلى f المصفوفة $P_e^f=Mat_e(f_2,\dots,f_n)$.

مبرهنة (14)

ليكن الفضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل k. وليكن $e=(e_1,\dots,e_n)$ أساساً لهذا الفضاء.

ولتكن $P=(P_{ij})$ مصفوفة من الفضاء $M_n(K)$. عندئذٍ تُكون جملة الأشعة $f=(f_1,\dots,f_n)$

حيث $f_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}.e_i$ أساساً للفضاء E إذا وفقط وإذا كانت المصفوفة $P=(P_{ij})$ قابلة للقلب.

الإثبات:

ليكن u التطبيق الخطي في $L(E)$ المعرف كما يلي $\forall j\in\mathbb{N}_n;\quad u(e_j)=f_j$ عندئذٍ

$P=Mat_e(u)$ وبالتالي:

f أساس لـ $E \Leftrightarrow f$ تولد $E \Leftrightarrow (n=rg(u)) \Leftrightarrow (n=rg(P)) \Leftrightarrow P$ قلوبة

مبرهنة (15)

ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل K. ليكن $x\in E$. ولتكن f,e أساسين لـ E.

لتكن $X=Mat_e(x), X'=Mat_f(x)$ عندئذٍ: $X=P_e^f X'$.

الإثبات:

$$\forall x\in E\quad ;\exists(\alpha_1\dots\alpha_n)\in K^n;\quad x=\alpha_n e_n=\sum_{i=1n}^{n}\alpha_i e_i$$

$$\forall\ x\in E\quad ;\exists(\beta_1,\dots,\beta_n)\in K^n;x=\beta_1 f_1+\dots+\beta_n f_n=\sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j$$

حيث:

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\quad,\quad X'=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

ولكن $\forall j\in\mathbb{N}_n; f_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}e_i$ وبالتالي $x=\sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{n}P_{ij}.e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}P_{ij}\beta_j\right)e_i$

ولكن $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ إذن $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.e_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}P_{ij}.\beta_j).e_i\right)$ أي أن $\forall i\in\mathbb{N}_n,\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\beta_j$

و نستنتج أن $X=P_e^f X'$.

مثال

ليكن $E=\mathbb{R}^2$ وليكن لدينا الشعاعين $f_1=(1,2),\quad f_2(1,3)$

a- أثبت أن الجملة $f=(f_1,f_2)$ هي أساس لـ $E=\mathbb{R}^2$.

b- أكتب مصفوفة الانتقال من الأساس القانوني $e=\{(1,0),(0,1)\}$ إلى الأساس f.

C- إذا كان $x=(4,1)\in\mathbb{R}^2$. أوجد إحداثيات الشعاع x بالأساس $f=(f_1,f_2)$.

الحل:

a- $x=(x_1,x_2)\quad \forall x\in\mathbb{R}^2;$ عندئذٍ نستطيع أن نجد $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ بحيث يكون

$\lambda f_1+\mu f_2=(x_1,x_2)$ أي $\lambda(1,2)+\mu(1,3)=(x_1,x_2)$ إذن $\lambda+\mu=x_1,\quad 2\lambda+3\mu=x_2$

$$\Rightarrow \lambda=x_1-\mu,\quad \lambda=\frac{1}{2}(x_2-3\mu)\Rightarrow 2x_1-2\mu=x_2-3\mu\Rightarrow \mu=x_2-2x_1\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda=x_1-\mu=3x_1-x_2\in\Re$$

إذن f مولدة. وهي حرة لأن إذا كان $\lambda f_1+\mu f_2=0\quad \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2;$ فإن $\lambda+\mu=0$ و$2\lambda+3\mu=0$ أي أن $\lambda=\mu=0$ إذن f أساس لـ E.

b- إن $(f_1,f_2)\in E^2$ إذن $f_1=\lambda e_1+\mu e_2\Rightarrow\lambda(1,0)+\mu(0,1)=(1,2)$ وبالتالي $\lambda=1,\mu=2$
وبنفس الشكل نجد أن $f_2=1e+3e_2=e_1+3e_2$. أي أن

$$P_e^f=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$$

لاحظ أن:

$$\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1+2e_2\\e_1+3e_2\end{pmatrix}={}^t\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}=P_e^f\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}$$

$${}^tf={}^tP_e^fe\quad\Rightarrow\quad f=eP_e^f$$

C- نلاحظ أن $(4,1)=4(1,0)+(0,1)=4e_1+1e_2=4e_1+e_2$ وبما أن $x=(4,1)\in\mathbb{R}^2$ فإن $(4,1)=\lambda f_1+\mu f_2$ حسب المبرهنة (15) فإنه إذا كان $X=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\quad X'=\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}$ فإن

$$X=PX'\Rightarrow\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda+\mu=4,\quad 2\lambda+3\mu=1$$

إذن $\lambda=4-\mu\Rightarrow 8-2\mu+3\lambda=1$ وبالتالي $\mu=-7$ ونستنتج أن $\lambda=4-(-7)=11$

إذن إحداثيات $x=(4,1)$ في الأساس f هو الشعاع $X'={}^t(11,-7)$.

7. المصفوفات المتشابهة (Similar Matrix)

تعريف

لتكن $A,B\in M_n(K)$ مصفوفتين مربعتين. نقول عن A,B أنهما متشابهتان إذا وفقط تحقق الشرط التالي $\exists P\in GL_n(K);B=PAP^{-1}$

ملاحظة

لنرمز للمصفوفات المتشابهة بـ $A\cong B$ عندئذٍ العلاقة $(\cong)$ تُعرف علاقة تكافؤ (أثبت ذلك).

مبرهنة (16)

إذا كان E فضاء شعاعياً منتهي البعد فوق الحقل K. لتكن A,B مصفوفتين مربعتين من $M_n(K)$. إن B,A متشابهتين إذا وفقط إذا وجد التطبيق الخطي $u:E\to F$ و أساسين e,f لـ E حيث $A=Mat_e(u),\quad B=Mat_f(u)$.

مبرهنة (17)

إذا كانت B,A مصفوفتين مربعتين من $M_n(K)$ ولنفترض أن $A\cong B$ عندئذ الشروط التالية محققة:

1- ${}^tA\cong{}^tB$

2- $Tr(A)=Tr(B)$

3- $\forall\quad k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(A^k\cong B^k)\wedge(A^k=PB^kP^{-1})$

4- إذا كانت A قابلة للقلب فإن B قابلة للقلب و $A^{-1}\cong B^{-1}$.

الإثبات: واضح

تدريبات

التمرين الأول

نعرف المصفوفة معدومة القوة إذا وجد عدد $p \in \mathbb{N}^*$ حيث $A^p = 0$ إذا كانت A مصفوفة معدومة القوة. أثبت أن $(I_n - A)$ مصفوفة قلوبة.

الحل:

في القسم الثاني من هذا الفصل وجدنا أن:

$$(I_n - A^p) = (I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{p-1})$$

بما أن A معدومة القوة فإنه يوجد $P \in N^*$ حيث $A^p = 0$ ومنه

$$(I_n - 0) = (I_n + A + \cdots + A^{p-1})$$

أي $(I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{p-1}) = I_n$

ومنه المصفوفة $(I_n - A)$ قابلة للقلب ومقلوبها هو المصفوفة

$$(I_n - A)^{-1} = (I_n + A + \cdots + A^{p-1})$$

التمرين الثاني

ليكن $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ولتكن $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ مصفوفة من $M_2(\mathbb{R})$ احسب A^n, A^2 حيث $\forall n \in \mathbb{N}$

الحل:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن المصفوفة A تكتب بالشكل التالي:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= A_1 + A_2$$

لاحظ أيضاً أن:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = o_2$$

وأن:

$$A_2^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^N \end{pmatrix} \quad ; \quad \forall n \in N^*$$

وبالتالي:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*;\quad A^n = (A_1 + A_2)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k A_1^k A_2^{n-k}$$

$$= C_n^0 A_1^0 A_2^n + C_n^1 A_1\, A_2^{n-1} + C_n^2 A_1^2 + A_2^{n-2} + \cdots$$

$$= C_n^0 A_1^0 A_2^n + C_n^1 A_1\, A_2^{n-1} + 0_2 + \cdots + 0_2$$

$$= A_2^n + nA_1 A_2^{n-1} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ nba^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nba^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

من أجل $n = 2$ نلاحظ أننا نحصل على $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ba & 0 \end{pmatrix}$

التمرين الثالث

نسمي المصفوفة التالية مصفوفة Jordan Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

أحسب J^2 و استنتج J^n حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

التمرين الرابع

بين أن المصفوفة التالية قابلة للقلب

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

احسب مقلوب هذه المصفوفة.

التمرين الخامس

ليكن $(i,j)\in\mathbb{N}_n^2$ ولتكن $A=I+\lambda E_{lk}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ أثبت أن المصفوفة A قابلة للقلب واحسب مقلوبها.

التمرين السادس

بين أن المصفوفتين $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ غير متشابهتين.

التمرين السابع

أثبت أن لمصفوفتين متشابهتين نفس الأثر ونفس الرتبة.

أوجد مصفوفتين A,B لهما نفس الأثر ونفس الرتبة ولكنهما غير متشابهتين.