الفصل السادس: مشاكل التخصيص (Assignment Problems)

١. المقدمة: (Introduction)

تتلخص مشاكل التخصيص بوجود عدد من الاعمال أو الوظائف ، وليكن قدرها (m) يمكن تنفيذ كل منها بواسطة أي من الامكانيات المتاحة كالمكائن أو العمال البالغ عددها (m) أيضاً. وهي التي تختلف فيما بينها في كلفة أو وقت أو كفاءة التنفيذ لكل عمل أو وظيفة. ويكون المطلوب اختيار أحد الامكانيات المتاحة المناسبة لتنفيذ كل عمل بأقل التكاليف الممكنة أو بأقل وقت ممكن أو بأعلى كفاءة ممكنة بتخصيص أحد الامكانيات المتاحة لهُ. وهكذا تعتبر مشاكل التخصيص حالة خاصة من حالات النقل بين مصادر التجهيز ومناطق الاستعمال ويتم التوزيع فيها بحيث يخصص كل مصدر لكل غاية أو هدف.

٢. طرائق حل مشاكل التخصيص: (A methods for solving Assignment Problems)

أولاً: طريقة النقل: (A method Transportation)

لتخصيص عدد من العمال قدره (m) لعدد من الامكانيات المتاحة قدره (m) فأن أي عمل وليكن (i) يمكن تنفيذه على أي من الامكانيات المتاحة ولتكن الماكينة (j) أو العامل ، وبكلفة قدرها C_{ij} ، حيث أن:

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

وتأخذ مصفوفة المعاملات الناتجة من تخصيص الامكانيات المتاحة للأعمال المختلفة ، الموضحة بالجدول رقم (١) الآتي:

جدول رقم (١)

الامكانيات / الاعمال	1	2	3	…	j	…	m
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	…	C_{1j}	…	C_{1m}
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	…	C_{2j}	…	C_{2m}
3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	…	C_{3j}	…	C_{3m}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	…	C_{ij}	…	C_{im}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	…	C_{mj}	…	C_{mm}

حيث

أ. تقابل الاعمال والامكانيات في مشاكل التخصيص **مصادر التجهيز** في مشاكل النقل والمكائن تقابل **الغايات او الاهداف** في مشاكل النقل.

ب. يبلغ المتاح لكل مصدر من المصادر المتاحة واحتياج كل منطقة الوحدة الواحدة و هو ما يمكن تمثيله كما يلي ، ولكل قيم **(i)** ، و **(j)**

$$\mathbf{a_i = 1}$$

$$\mathbf{b_j = 1}$$

ج. كلفة تخصيص العمل **(i)** للماكينة **(j)** تساوي $(\mathbf{C_{ij}})$ وفي حالة عدم تخصيص عمل ما لماكينة معينة. فأن التكاليف المناظرة $(\mathbf{C_{ij}})$ تساوي **(M)** حيث **(M)** كلفة عالية جداً.

وفي حالة ما اذا كان عدد الاعمال **(n)** لا يساوي عدد المكائن **(m)** فمن الواجب مساواتها بإضافة اعمال وهمية **(Fictitious Jobs)** أو مكائن وهمية **(Fictitious Machines)**

$$\mathbf{n > m}$$

أو

$$\mathbf{n < m}$$

ثانياً: طريقة النموذج الرياضي: **(A method Mathematical model)**

يمكن التعبير عن نموذج التخصيص رياضياً كما يلي:

دالة الهدف

$$\textbf{Minimize} \qquad \mathbf{Z} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}} \mathbf{C_{ij} * X_{ij}}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{X_{ij}} = 1 \qquad for\ j = 1,2, \dots, m \qquad \dots \dots .. (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_{ij}} = 1 \qquad for\ i = 1,2, \dots, n \qquad \dots \dots .. (2)$$

وفي حالة عدم تخصيص العمل (i) للماكينة (j) فيكون $\mathbf{X_{ij}} = \mathbf{0}$

وفي حالة تخصيص العمل (i) للماكينة (j) فيكون $\mathbf{X_{ij}} = \mathbf{1}$

وبغض النظر عن الطريقة المستخدمة في التوصل الى الحل الابتدائي فمن الطبيعي أن تؤدي الطريقة الى حدوث حالة الانحلال (**Degeneracy**).

مثال (١): يتوفر لدى احدى الورش ثلاثة اعمال وثلاثة مكائن ، يمكن لأي منها تنفيذ أي عمل وبالكلف المبينة بالجدول الآتي:

j / i	A	B	C
1	**5**	**7**	**9**
2	**4**	**10**	**12**
3	**15**	**13**	**14**

المطلوب اثبات ان استخدام اي طريقة من طرق النقل التي سبق التطرق اليها ستؤدي الى حدوث حالة الانحلال (أو عدم الانتظام) ، (**Degeneracy**).

وبتطبيق طريقة الركن الشمالي الغربي مثلاً.

فيكون تنفيذ العمل (1) على الماكينة (A) ، و العمل (2) على الماكينة (B) ، و العمل (3) على الماكينة (C) ، وستبقى معظم المتغيرات الباقية مساوية للصفر (**حالة عدم الانتظام**).

أما اذا أردنا تطبيق طريقة أقل كلفة

فيكون أيضاً ، تنفيذ العمل (1) على الماكينة التي تتمتع بأقل كلفة بالصف الأول وهي الماكينة (**A**) ، وكذلك تخصيص العمل (2) على الماكينة (B) (وهي الأقل كلفة في الصف الثاني بعد تخصيص العمل الأول على الماكينة A)، وكذلك تخصيص العمل (3) على الماكينة (C). (لنفس السبب السالف بصدد تخصيص العمل الثاني على الماكينة B).

ثالثاً: طريقة الحصر (Enumerating method)

في هذه الطريقة يتم حصر كل الطرق الممكنة لتخصيص عدد (m) من الاعمال لعدد (m) من المكائن مثلاً ، ثم نختار من بينها التخصيص الذي يحقق الهدف ، ويلاحظ ان عدد الطرق الممكنة لتخصيص الاعمال للمكائن في هذه الحالة يساوي (مفكوك m) رياضياً يكتب (m!).

مثال (٢): يتوفر لدى احدى الورش ثلاثة اوامر تشغيل (1 ، 2 ، 3) يحتاج كل منها الى عملية تقطيع يمكن تنفيذها على اي من مكائن التقطيع (A ، B ، C) و بوقت تنفيذ بالدقائق مبين بالجدول الآتي . المطلوب ايجاد التخصيص الامثل الذي يحقق تنفيذ الاوامر الثلاثة بأقل وقت ممكن.

المكائن / الاوامر	A	B	C
1	550	300	350
2	475	425	300
3	250	500	400

الحل: يبلغ عدد طرق التخصيص الممكنة للأوامر الثلاثة على المكائن الثلاث وكما يلي:

$$(3!) = 3 * 2 * 1 = 6$$

ويبلغ وقت كل منها كما يلي:

1. $(1 \rightarrow A):(2 \rightarrow B):(3 \rightarrow C) = 550 + 425 + 400 = 1375$
2. $(1 \rightarrow A):(2 \rightarrow C):(3 \rightarrow B) = 550 + 300 + 500 = 1350$

3. $(1 \rightarrow B):(2 \rightarrow A):(3 \rightarrow C) = 300 + 475 + 400 = 1175$

4. $\boldsymbol{(1 \rightarrow B):(2 \rightarrow C):(3 \rightarrow A) = 300 + 300 + 250 = 850}$

5. $(1 \rightarrow C):(2 \rightarrow A):(3 \rightarrow B) = 350 + 475 + 500 = 1325$

6. $(1 \rightarrow C):(2 \rightarrow B):(3 \rightarrow A) = 350 + 425 + 250 = 1025$

وبذلك يصبح التخصيص الرابع هو الافضل حيث يحقق اقل وقت ممكن لتنفيذ الاوامر الثلاثة وقدره **(850)** دقيقة.

ويعاب على هذه الطريقة التي تتعدد فيها الاعمال والمكائن صعوبة الحصر واستحالته في بعض الاحيان ، ففي حالة تنفيذ عشرة اعمال على عشرة مكائن فيبلغ عدد الطرق الممكنة للتخصيص $(10!) = 10 * 9 * \ldots * 2 * 1 = 3628800$

طريقة مختلفة وفي حالة تنفيذ خمسة عشر عملاً على خمس عشرة ماكنة يبلغ عدد الطرق الممكنة للتخصيص

$$(15!) = 15 * 14 * \ldots * 2 * 1 = 1307674368000$$

طريقة مختلفة وهو ما يوضح استحالة استخدام هذه الطريقة في مثل هذه الحالات وهي الحالات العامة بالورش والمعامل والمنشأت.

رابعاً: طريقة المجرية أو خوارزمية جونسن:

(Hungarian method or Johnson's Algorithm's)

تعتمد هذه الطريقة على حقيقة أنهُ اذا اضيف أو طرح رقم ثابت الى او من أي صف أو عمود من صفوف أو أعمدة أي مصفوفة للتكاليف مثلاً $\mathbf{C_{ij}}$ المرتبطة بمشكلة التخصيص سيبقى الحل الأمثل للمشكلة هو نفسه ويمكن اثبات ذلك وكما يلي:

اذا طرح المقدار $\mathbf{P_i}$ من الصف (i) ، واذا طرح المقدار $\mathbf{q_j}$ من العمود (j)

فأن عناصر مصفوفة الكلفة الجديدة تصبح قيمتها $\mathbf{\acute{C}_{ij}}$ بدلاً من $\mathbf{C_{ij}}$ حيث أن

$$\mathbf{\acute{C}_{ij} = C_{ij} - (P_i) - (q_j)}$$

وبذلك تصبح دالة الهدف الجديدة هي تقليص $\mathbf{\acute{Z}}$ .Min حل ثاني

$$\mathbf{Min.}\ \ \mathbf{\acute{Z}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{\acute{C}_{ij} * X_{ij}} \qquad \dots\dots(\mathbf{3})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left[\mathbf{C_{ij}} - (\mathbf{P_i}) - (\mathbf{q_j})\right] * \mathbf{X_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{C_{ij}} * \mathbf{X_{ij}} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P_i} * \sum_{j=1}^{m} \mathbf{X_{ij}} - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{q_j} * \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_{ij}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_{ij}} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{X_{ij}} = 1$$

$$\mathbf{\acute{Z}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{C_{ij}} * \mathbf{X_{ij}} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P_i} - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{q_j}$$

$$\mathbf{\acute{Z} = z - constant} \quad \dots\dots(\mathbf{4})$$

وهذا يوضح أن تقليل دالة الهدف الأصلية (Z) سيقلص الى الدالة $(\mathbf{\acute{Z}})$ وتأسيساً على ذلك فأنهُ إذا امكن تكوين مصفوفة جديدة $\mathbf{\acute{C}_{ij}}$ محتوية على اصفار أي أقل تكاليف لا توجد تكاليف سالبة ، فأن هذه الاصفار تتضمن حلاً مناسباً (حل ممكن) **(Feasible Solution)** ويتحقق ذلك باتباع الخطوات الآتية:

أ. نطرح أصغر رقم في كل صف من قيم هذا الصف ، فنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص هذا الصف لأي من أعمدة المصفوفة.

ب. نطرح أصغر رقم في كل عمود من قيم هذا العمود ، فنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص هذا العمود لأي من صفوف المصفوفة وسوف نورد بقية الخطوات اثناء حل المثال الآتي.

مثال (٣): يتوفر لدى احدى الورش ثلاثة اوامر تشغيل (1 ، 2 ، 3) يحتاج كل منها الى عملية تقطيع يمكن تنفيذها على اي من مكائن التقطيع (A ، B ، C) و بوقت تنفيذ بالدقائق مبين بالجدول الآتي . المطلوب ايجاد التخصيص الامثل الذي يحقق تنفيذ الاوامر الثلاثة بأقل وقت ممكن.

ماذا يحدث لو طرحنا أو اضفنا مقداراً ثابتاً من او الى أي صف أو عمود من صفوف أو أعمدة مصفوفة وقت تنفيذ اوامر التشغيل الثلاثة على المكائن الثلاثة لمثالنا السابق وكما يأتي:

المكائن / الاوامر	A	B	C
1	550	300	350
2	475	425	300
3	250	500	400

لنطرح مقداراً ثابتاً وليكن (25) من الصف الأول بالمصفوفة فنحصل على المصفوفة الجديدة الآتية.

المكائن / الاوامر	A	B	C
1	525	275	325

2	**475**	**425**	**300**
3	**250**	**500**	**400**

الحل: يبلغ عدد طرق التخصيص الممكنة للأوامر الثلاثة على المكائن الثلاث وكما يلي:

$(3!) = 3 * 2 * 1 = 6$

ويبلغ وقت كل منها كما يلي:

1. $(1 \to A):(2 \to B):(3 \to C) = 525 + 425 + 400 = 1350$
2. $(1 \to A):(2 \to C):(3 \to B) = 525 + 300 + 500 = 1325$
3. $(1 \to B):(2 \to A):(3 \to C) = 275 + 475 + 400 = 1150$
4. $\boldsymbol{(1 \to B):(2 \to C):(3 \to A) = 275 + 300 + 250 = 825}$
5. $(1 \to C):(2 \to A):(3 \to B) = 325 + 475 + 500 = 1300$
6. $(1 \to C):(2 \to B):(3 \to A) = 325 + 425 + 250 = 1000$

ويبدو واضحاً يبقى التخصيص الرابع هو الافضل حيث يحقق اقل وقت ممكن لتنفيذ الاوامر الثلاثة وقدره **(825)** دقيقة.

$\mathbf{\acute{Z} = z - constant = 850 - 25 = 825}$

ولغرض أن يتأكد الطالب من اضافة أي كمية ثابتة لأي عمود فليحاول ذلك وليعتبره واجباً بيتياً.

الآن ، مـاذا يحـدث لـو اضـفنا مقداراً ثابتـاً مـن او الــى أي صـف أو عمـود مـن صـفوف أو أعمـدة مصفوفة وقت تنفيذ اوامر التشغيل الثلاثة على المكائن الثلاثة لمثالنا السابق وكما يأتي:

الاوامر \ المكائن	A	B	C
1	550	300	350
2	475	425	300
3	250	500	400

لنضيف مقداراً ثابتاً وليكن (50) إلـى العمـود الثـاني بالمصـفوفة فنحصـل علـى المصـفوفة الجديـدة الآتيـة.

الاوامر \ المكائن	A	B	C
1	550	350	350
2	475	475	300
3	250	550	400

الحل: يبلغ عدد طرق التخصيص الممكنة للأوامر الثلاثة على المكائن الثلاث وكما يلي:

$(3!) = 3 * 2 * 1 = 6$

ويبلغ وقت كل منها كما يلي:

1. $(1 \rightarrow A):(2 \rightarrow B):(3 \rightarrow C) = 525 + 475 + 400 = 1400$
2. $(1 \rightarrow A):(2 \rightarrow C):(3 \rightarrow B) = 525 + 300 + 550 = 1375$
3. $(1 \rightarrow B):(2 \rightarrow A):(3 \rightarrow C) = 325 + 475 + 400 = 1200$
4. $\mathbf{(1 \rightarrow B):(2 \rightarrow C):(3 \rightarrow A) = 325 + 300 + 250 = 875}$
5. $(1 \rightarrow C):(2 \rightarrow A):(3 \rightarrow B) = 325 + 475 + 550 = 1350$
6. $(1 \rightarrow C):(2 \rightarrow B):(3 \rightarrow A) = 325 + 475 + 250 = 1050$

ويبدو واضحاً يبقى التخصيص الرابع هو الافضل حيث يحقق اقل وقت ممكن لتنفيذ الاوامر الثلاثة وقدره **(875)** دقيقة.

$\mathbf{\acute{Z} = z + constant = 850 + 50 = 875}$

مثال (4):

أوجد التخصيص الأمثل لجدول كلف تنفيذ الأعمال الثلاثة على المكائن (A ، B ، C) مستخدماً الطريقة المجرية (**خوارزمية جونسون**)

المكائن / الاوامر	A	B	C
1	5	7	9
2	14	10	12
3	15	13	16

١. نطرح أصغر رقم في كل صف من قيم هذا الصف لنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص كل عمل لأي من هذه المكائن الثلاث.

٢. نطرح أصغر رقم في كل عمود من قيم هذا العمود لنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص كل ماكينة لأي من هذه الاعمال الثلاثة.

المكائن / الاوامر	A	B	C	اصغر كمية والتي طرحت من الصف المقابل لها
1	5-5	7-5	9-5	$P_1 = 5$
2	14-10	10-10	12-10	$P_2 = 10$
3	15-13	13-13	16-13	$P_3 = 13$

الاوامر \ المكائن	A	B	C
1	0-0	2-0	4-2
2	4-0	0-0	2-2
3	2-0	0-0	3-2
اصغر كمية والتي طرحت من العمود المقابل لها	$q_1 = 0$	$q_2 = 0$	$q_3 = 2$

الاوامر \ المكائن	A	B	C
1	0	2	2
2	4	0	0
3	2	0	1

وهنا ولتوفر اصفار في كل صف وبالحد الأدنى صفر لكل صف فأننا نختار صفر من كل صف بحيث لا يتعارض من تخصيص كل عمل على ماكينة واحدة وكما هو مؤشر على كل صفر بمربع.

٣. تعطي الاصفار المؤشرة (داخل المربعات) التخصيص الأمثل وكما يلي:

ينفذ العمل الأول على الماكينة الأولى ويكلف 5 دينار.

ينفذ العمل الثاني على الماكينة الثالثة ويكلف 12 دينار.

ينفذ العمل الثالث على الماكينة الثانية ويكلف 13 دينار.

مجموع الكلف النهائية = 30 دينار.

ولشرح الخطوات الأخرى للطريقة يفضل أخذ المثال الآتي:

مثال (5): يوضح الجدول الآتي أوقات تنفيذ أي من الاعمال الأربعة (1 ، 2 ، 3 ، 4) على أي من المكائن الأربع (A ، B ، C ، D).

المطلوب: التوصل الى التخصيص الأمثل الذي يقلل الوقت المستغرق للتنفيذ الى ادنى حد ممكن.

المكائن / الاعمال	A	B	C	D
1	1	4	6	3
2	9	7	10	9
3	4	5	11	7
4	8	7	8	5

الحل: نطرح اصغر رقم في كل صف وكما يلي:

المكائن / الاعمال	A	B	C	D	أصغر رقم تم طرحه من الصف المقابل لهُ
1	0	3	5	2	$P_1 = 1$
2	2	0	3	2	$P_2 = 7$
3	0	1	7	3	$P_3 = 4$
4	3	2	3	0	$P_4 = 5$

نطرح اصغر رقم في كل عمود وكما يلي:

المكائن / الاعمال	A	B	C	D
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0
أصغر رقم تم طرحه من العمود المقابل لهُ	$q_1 = 0$	$q_2 = 0$	$q_3 = 3$	$q_4 = 0$

ونحصل بذلك على مصفوفة الفرص الضائعة الكلية (تخصيص كل عمل لأي من المكائن المتاحة وكل ماكنة لأي من الأعمال المتاحة) الآتية:

وبالنظر لصعوبة الحصول على التخصيص الأمثل ، وكما يتضح من الجدول أعلاه الذي يبين أن عدد الخلايا الصفرية المعبرة عن التكاليف الدنيا والتخصيص الأمثل أقل من عدد الأعمال أو المكائن ، ولاستخراج الحل الامثل النهائي ، تتبع الخطوات الآتية وهي للطريقة المجرية وكما يلي:

ج. تغطي كافة الاصفار المصفوفة بأقل عدد ممكن من الخطوط الافقية او العمودية او كلاهما. فاذا كان عدد تلك الخطوط مساوياً لعدد الصفوف او الاعمدة. المصفوفة تحقق حالة التخصيص الأمثل.

المكائن / الاعمال	A	B	C	D
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

وهنا أقل عدد من الخطوط التي تغطي الاصفار = 3 ، لا يساوي عدد الصفوف او الاعمدة بالمصفوفة وعددها اربعة.

٤. اذا كان اقل عدد من الخطوط التي تغطي اصفار المصفوفة اقل من عدد صفوفها أو اعمدتها ، نختار ادنى رقم بالمصفوفة لم يغطه اي من هذه الخطوط ، ويطرح من كل رقم بالمصفوفة يغطه اي خط ، ويضاف الى كل رقم بالمصفوفة يقع عند ملتقى خطين افقي و رأسي ، ونترك بقية الارقام كما هي ، وفي مثالنا فأن ادنى رقم بالمصفوفة لم يغطه خط هو (1) .

بتنفيذ الوارد بالخطوة رقم (٤) نحصل على المصفوفة التالية

المكائن / الاعمال	A	B	C	D
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

المكائن / الاعمال	A	B	C	D

1	0	٢	١	2
2	٣	0	0	2
3	0	٠	٣	٢
4	٤	2	0	0
المكائن / الاعمال	A	B	C	D
1	0	2	1	2
2	3	0	0	2
3	0	0	3	2
4	4	2	0	0

٥. تعاد الخطوة (٣) وكما هو مبين في المصفوفة الأخيرة ، وهنا يكون أقل عدد من الخطوط التي تغطي الاصفار = 4 = عدد الصفوف والاعمدة بالمصفوفة وهذا يعني تحقيق التخصيص الأمثل ويكون كما يلي:

ينفذ العمل الأول على الماكينة الأولى ويكلف 1 دقيقة.

ينفذ العمل الثاني على الماكينة الثالثة ويكلف 10 دقيقة.

ينفذ العمل الثالث على الماكينة الثانية ويكلف 5 دقيقة.

ينفذ العمل الرابع على الماكينة الرابعة ويكلف 5 دقيقة.

مجموع الكلف النهائية = 21 دقيقة.

ومما تجدر الاشارة اليهِ ، وفي حالة عدم التوصل إلى التخصيص الأمثل نتيجة الخطوة (٥) تعاد الخطوتين (٣) ، و (٤) وهكذا حتى نحصل على التخصيص الأمثل.

٢. حالات خاصة لمشاكل التخصيص:

اولاً : الحالات غير المتزنة (**Un balanced cases**)

يشترط لاستخدام الطريقة المجرية ان تكون المصفوفة مربعة أي تساوي عدد الصفوف والأعمدة ، اما اذا كان عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة تحول المصفوفة الحالية الى مصفوفة مربعة وذلك بإضافة بعض الأعمال الوهمية بكلف ارقام صفرية اذا كانت $\mathbf{n < m}$ أو بإضافة المكائن الوهمية بكلف و أرقام و أوقات صفرية اذا كانت $\mathbf{n > m}$ وبمقدار الفرق بين n و m ثم متابعة الحل بنفس الخطوات المجرية.

مثال (6): يوضح الجدول الآتي كلف تنفيذ المشاريع الثلاثة (1 ، 2 ، 3) بالاف الدنانير التي تقدمت بها الشركات الأربع (A ، B ، C ، D)

المطلوب: التوصل الى التخصيص الأمثل للمشاريع على الشركات والذي يحقق أقل تكاليف ممكنة.

الشركات / المشاريع	A	B	C	D
1	90	40	60	80
2	70	60	80	50
3	80	70	50	50

الحل:

حيث أن عدد المشاريع أقل من عدد الشركات ، ولمعالجة ذلك يضاف مشروع رابع وهمي بكلف (0) صفرية ، وذلك لتحويل المصفوفة إلى مصفوفة مربعة ثم يتابع الحل وكما يلي:

الشركات / المشاريع	A	B	C	D
1	90	40	60	80
2	70	60	80	50
3	80	70	50	50
4	0	0	0	0

المشاريع \ الشركات	A	B	C	D
1	50	0	20	40
2	20	10	30	0
3	30	20	0	0
4	0	0	0	0

وهنا نجد أن أقل عدد من الخطوط التي تغطي الاصفار = 4 خطوط ، ويساوي عدد الصفوف أو الاعمدة بالمصفوفة وهذا يعني تحقق التخصيص الأمثل وكما يلي:

ينفذ المشروع الأول من قبل الشركة الثانية (B) ويكلف 40 الف دينار.

ينفذ المشروع الثاني من قبل الشركة الرابعة (D) ويكلف 50 الف دينار.

ينفذ المشروع الثالث من قبل الشركة الثالثة (C) ويكلف 50 الف دينار.

تنفذ الشركة (A) المشروع الوهمي (4) ، وبكلفة صفر.

وهكذا تنفذ المشاريع الثلاثة الحقيقية بأقل كلفة ممكنة = 140 الف دينار.

ثانياً : حالة تعظيم دالة الهدف **(Maximizing objective function)**

في حالة ما اذا كان الهدف من التخصيص هو التعظيم كما في حالات الربح أو كفاءة الاداء أو غير ذلك. يتم تحويل الحالة المتدنية التي سبق شرحها **.Min** بإيجاد مصفوفة الكلف النسبية (Relative Cost) ، وذلك بطرح كل قيم المصفوفة من أكبر قيمة بها ثم يتابع الحل بنفس الخطوات السابقة.

مثال (7): لدى أحد المؤسسات أربعة مدراء وثلاثة معامل ترغب في التوصل إلى التخصيص الأمثل للمدراء بحيث يتحقق من ذلك أكبر عائد ممكن وطبقاً للبيانات التالية عن العائد المتحقق شهرياً بالاف الدنانير من كل حالة.

المدراء \ المعامل	A	B	C
1	1	4	7
2	8	3	1
3	5	6	2
4	4	1	7

الحل : حيث ان عدد المعامل أقل من عدد المدراء ، إذاً يضاف معمل رابع وهمي لتحويل المصفوفة الى مصفوفة مربعة – ذو عوائد صفرية – ثم توجد مصفوفة الكلف النسبية ، وذلك بطرح كل قيم المصفوفة من اكبر قيمة والبالغة (8) ويتابع الحل كما سبق في تحديد خطوات الحل العامة.

المدراء \ المعامل	A	B	C	D
1	1	4	7	0
2	8	3	1	0
3	5	6	2	0
4	4	1	7	0

وبطرح كل القيم من اكبر قيمة موجودة في المصفوفة وهي (8) نحصل على مصفوفة الكلف النسبية الآتية:

المدراء \ المعامل	A	B	C	D	اصغر قيمة في كل صف تطرح من بقية الصف
1	7	4	1	8	$P_1 = 1$
2	0	5	7	8	$P_2 = 0$
3	3	2	6	8	$P_3 = 2$
4	4	7	1	8	$P_4 = 1$

المعامل / المدراء	A	B	C	D	اصغر قيمة في كل صف تطرح من بقية الصف
1	6	3	0	7	$P_1 = 1$
2	0	5	7	8	$P_2 = 0$
3	1	0	4	6	$P_3 = 2$
4	3	6	0	7	$P_4 = 1$

المعامل / المدراء	A	B	C	D
1	6	3	0	7
2	0	5	7	8
3	1	0	4	6
4	3	6	0	7
اصغر قيمة في كل عمود تطرح من بقية قيم الاعمدة	$q_1 = 0$	$q_2 = 0$	$q_3 = 0$	$q_4 = 6$

المعامل / المدراء	A	B	C	D
1	6	3	0	1
2	0	5	7	2
3	1	0	4	0
4	3	6	0	1

وبما أن عدد الخطوط ثلاثة وهي لا تساوي عدد الصفوف او الاعمدة وبالرجوع الى الخطوات السابقة وتطبيقها نحصل على المصفوفة الآتية:

المعامل / المدراء	A	B	C	D
1	5	2	0	0
2	0	5	8	2
3	1	0	5	0
4	2	5	0	0

وهنا يظهر أن أقل عدد من الخطوط والتي تغطي الاصفار = 4 = عدد الصفوف أو الاعمدة بالمصفوفة وهذا يعني تحقيق التخصيص الامثل وكما يلي:

البديل الأول:

١. ينسب المدير الأول (1) إلى المعمل (C) ويحقق عائداً قدره (7000) دينار.
٢. ينسب المدير الثاني (2) إلى المعمل (A) ويحقق عائداً قدره (8000) دينار.
٣. ينسب المدير الثالث (3) إلى المعمل (B) ويحقق عائداً قدره (6000) دينار.
٤. ينسب المدير الرابع (4) إلى المعمل الوهمي (D) فيحقق عائداً قدره (صفر) دينار.

وتحقق المعامل الثلاثة الحقيقية أكبر عائد = 21000 دينار.

البديل الثاني:

١. ينسب المدير الأول (1) إلى المعمل الوهمي (D) فيحقق عائداً قدره (صفر) دينار.
٢. ينسب المدير الثاني (2) إلى المعمل الأول (A) ويحقق عائداً قدره (8000) دينار.
٣. ينسب المدير الثالث (3) إلى المعمل الثاني (B) ويحقق عائداً قدره (6000) دينار.
٤. ينسب المدير الرابع (4) إلى المعمل الثالث (C) فيحقق عائداً قدره (7000) دينار.

وكذلك تحقق المعامل الثلاثة الحقيقية أكبر عائداً مقداره = 21000 دينار. ، و واضح ان كلا البديلين يحقق نفس العائد فيمكن الأخذ بأي منهما.

التمارين (Exercises)

١. قام أحد البنوك باستئجار دور كامل في أحد العمارات المرتفعة الجديدة في أحدى المدن ، وقد اراد رئيس البنك تخصيص خمسة مكاتب على خمسة نواب وبالشكل الذي يؤدي الى **تحسين العمل الى اقصى حد ممكن** ، ولذلك قام بسؤال كل نائب للرئيس بكتابة مدى تفضيله للتواجد في الحجرات الخمس المتاحة ولقد رتبت البيانات ثم عرضت على رئيس البنك وفقاً للشكل الآتي:

عامل / وظيفة	نائب 1	نائب 2	نائب 3	نائب 4	نائب 5
المكتب 1	1	1	2	3	2
المكتب 2	5	3	1	2	3
المكتب 3	4	2	5	1	1
المكتب 4	3	5	4	4	4
المكتب 5	2	4	3	5	5

وكان الترتيب (1) يعني افضل مكتب من وجهة نظر نواب الرئيس ، والمطلوب وضع أفضل خطة لتخصيص الحجرات الخمس.

٢. اذا توافرت لشركة أربعة أنواع من الآلات ، وخمسة أنواع من المهمات الانتاجية ، وكان عدد الآلات المتاحة من كل نوع هي **25** ، و **30** ، و **20** ، و**30** على التوالي ، وكان عدد الوظائف في كل نوع من المهمات الخمس هي **20** ، و **20** ، و **30** ، و **10** ، و **25** على التوالي. وكانت التكلفة الخاصة بتخصيص ماكنات من الانواع المختلفة للوظائف من المهمات المختلفة كما يأتي:

نوع الآلة \ المهام الانتاجية	1	2	3	4	5
1	10	2	2	15	9
2	5	10	15	2	4
3	15	5	14	7	15
4	20	15	13	-	8

أوجد التخصيص الامثل للآلات وذلك عن طريق التعبير عن المشكلة نموذجاً للنقل ، مع ملاحظة أن الماكنة من النوع الرابع لا يمكن تخصيصها على وظائف المهمة الانتاجية الرابعة.

٣. باستخدام طريقة التخصيص ، أوجد أفضل طريقة لتخصيص الأفراد العاملين بالمشروع على الوظائف المختلفة ، علماً بأن مصفوفة التخصيص كانت كما يأتي:

الوظيفة \ العامل	1	2	3	4	5	6
1	4	9	3	6	7	2
2	3	0	5	2	5	8
3	9	6	7	3	9	7
4	10	3	4	6	3	6
5	4	2	2	2	3	7
6	1	8	1	9	2	1

٤. فكر مستثمر بأنشاء أربعة مشاريع بلاستيكية صغيرة هي: (لعب الاطفال ، و الطاولات البلاستيكية ، و الكراسي البلاستيكية ، والاحذية البلاستيكية) ، ولهذا الغرض اختار أربعة مواقع هي (**A** ، و **B** ، و **C** ، و **D**) بلغت تكلفة الارض والهندسة المدنية لكل منها على النحو التالي:

المواقع / المشاريع	A	B	C	D
لعب الاطفال	**12**	**5**	**11**	**6**
الطاولات البلاستيكية	**7**	**11**	**5**	**8**
الكراسي البلاستيكية	**7**	**8**	**10**	**11**
الاحذية البلاستيكية	**5**	**10**	**7**	**8**

المطلوب: التخصيص الامثل للمشاريع على المواقع الاربعة.

٥. فيما يلي ثلاثة سيارات نقل بطاقات مختلفة: (**2** طن) ، (**4** طن) ، (**6** طن) ، وظروف العمل تستوجب اداء المهمات التالية: (نقل مخلفات البناء ، و نقل اكياس الاسمنت ، و توريد الحجز) ، وفيما يلي تكلفة اداء أي مهمة ازاء كل سيارة.

السيارات / المشاريع	**سيارة 2 طن**	**سيارة 4 طن**	**سيارة 6 طن**
نقل مخلفات	**8**	**12**	**16**
نقل اكياس الاسمنت	**4**	**6**	**8**
توريد الحجز	**8**	**16**	**10**

المطلوب: الوصول الى تخصيص يستهدف أقل كلفة.

٦. الجدول الآتي يوضح ازمنة انجاز المهام (C ، B ، A) بواسطة الاجهزة (1 ، 2 ، 3 ، 4)

الأجهزة / المهام	1	2	3	4
A	14	12	10	16
B	16	10	12	14
C	10	18	12	12

المطلوب: تحديد المهام التي يمكن ان تنجز من كل جهاز بشكل يعمل على تخفيض الزمن المستغرق للإنجاز.