**2- طريقة ذات المرحلتين: Two Phase method**

تستخدم هذه الطريقة لايجاد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية عندما تكون لدينا قيود بهيئة اكبر اوتساوي او تكون القيود معادلات في الاصل. والغاية من استخدامها هو استبعاد المتغيرات الاصطناعية في المرحلة الاولى والوصول للحل الامثل في المرحلة الثانية, أي ان الطريقة تتضمن مرحلتين, بعد تحويل النموذج من صيغته العامة الى الصيغة القياسية يتم الحل وفق هذه الطريقة كالاتي:

**المرحلة الاولى:**

تكتب دالة الهدف بمعاملات مساوية للصفر لجميع متغيرات القرار والمتغيرات المكملة, أما المتغيرات الاصطناعية فتكون بمعامل يساوي ( 1 ) في حالة تصغير دالة الهدف, وبمعامل يساوي ( -1 ) في حالة تعظيم دالة الهدف, يكون اول جدول مبسط ثم نستمر بالحل وصولا للحل الامثل.

**المرحلة الثانية:**

يؤخذ جدول الحل الامثل للمرحلة الاولى ليكون الجدول الأول للمرحلة الثانية ولكن بعد هذف اعمدة المتغيرات الاصطناعية منه وأعتماد معاملات متغيرات القرار الاصلية في دالة الهدف وكذلك معاملات المتغيرات المكملة ( التي تساوي الصفر), ثم ننطلق من هذا الجدول للوصول الى الحل الامثل.

مثال(1):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

Min. Z = 2X1 + 3X2

S.T.

X1 + X2 ≥ 5

X1 + 2X2 ≥ 6

X1 , X2 ≥ 0

الصيغة القياسية تكون :

Min. Z = 2X1 + 3X2

S.T.

X1 + X2 – S1  + A1 = 5

X1 + 2X2 – S2  + A2 = 6

X1 , X2, S1  , S2  , A1  , A2 ≥ 0

المرحلة الاولى ( Phase 1 ):

للمرحلة الاولى نكتب النموذج القياسي بدالة الهدف كالاتي:

Min. Z = A1 + A2

S.T.

X1 + X2 – S1  + A1 = 5

X1 + 2X2 – S1  + A1 = 6

X1 , X2, S1  , S2  , A1  , A2 ≥ 0

 نكون اول جدول مبسط للمرحلة الاولى

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **0** **0** **0 0 1 1**   | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|   **X1 X2 S1 S2 A1 A2**  |
| **5** |  **1 1 -1 0 1 0**  | **A1**  | **1** |
| **6** |  **1 ( 2 ) 0 -1 0 1**  | **A2**  | **1** |
| **Z= 11** |  **2 3 -1 -1 0 0** | **Zj** - **Cj** |

المتغير الداخل هو **X2** يقابل اكبر قيمة في صف **Zj** - **Cj**

نحدد المتغير الخارج من المتغيرات الاساسية في هذا الحل ( R1 = 5 , R2 = 3 ) أقل نسبة هي R2 لذا المتغير الخارج هو **A2**  . العمود المحوري هو العمود الثاني و الصف المحوري هو الصف الثاني والعنصر المحوري هو تقاطهما وهو (2).

نكون جدول الحل الاساسي الثاني

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **0** **0** **0 0 1 1**   | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|   **X1 X2 S1 S2 A1 A2**  |
| **2** |  **(1/2) 0 -1 1/2 1 -1/2**  | **A1**  | **1** |
| **3** |  **1/2 1 0 -1/2 0 1/2**  | **X2**  | **0** |
| **Z= 2** |  **1/2 0 -1 1/2 0 -3/2** | **Zj** - **Cj** |

A1 row = (1 1 -1 0 1 0 5 )- 1(1/2 1 0 -1/2 0 1/2 3)

 = ( 1/2 0 -1 1/2 1 -1/2 2)

Zj - Cj row = (2 3 -1 -1 0 0 11)

 -3(1/2 1 0 -1/2 0 1/2 3)

 = ( 1/2 0 -1 1/2 0 -3/2 2)

الحل الاساسي في الجدول الثاني لايمثل حلا اساسيا لوجود قيم موجبة في صف Zj - Cj . لذا نكون حل اساسي جديد ولكون **X1** و **S2** لهما نفس المعامل في صف **Zj** - **Cj** وهو اكبر معامل موجب لذا يمكن اختيار احدهما ليكون متغيرا داخلا , سنختار **X1** ليكون متغير داخل وعموده هو العمود المحوري , نحسب النسب لتحديد المتغير الخارج ( R1 = 4 , R2 = 6 ) لذا A1  هو المتغير الخارج وصفه هو الصف المحوري , والعنصر المحوري ( 1/2 ) ,جدول الحل الاساسي الثالث يكون كالاتي:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **0** **0** **0 0 1 1**   | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|   **X1 X2 S1 S2 A1 A2**  |
| **4** |  **1 0 -2 1 2 -1**  | **X1**  | **0** |
| **1** | 0 1 1 -1 -1 1 | **X2**  | **0** |
| **Z= 0** |  **0 0 0 0 -1 -1** | **Zj** - **Cj** |

 X2 row = (1/2 1 0 -1/2 0 1/2 3 )

 - (1/2)(1 0 -2 1 2 -1 4)

 = ( 0 1 1 -1 -1 1 1)

Zj - Cj row = (**1/2 0 -1 1/2 0 -3/2 2** )

 - ( 1/2 ) (1 0 -2 1 2 -1 4)

 = ( 0 0 0 0 -1 -1 0 )

الحل الاساسي في الجدول الاخير للمرحلة الاولى يمثل حل امثل لأن جميع قيم صف **Zj** - **Cj** اقل او تساوي الصفر( دالة الهدف بصيغة التصغير). نتوقف وننتقل للمرحلة الثانية.

المرحلة الثانية ( Phase 2 ):

 الجدول الاول للمرحلة الثانية هو نفس جدول الحل الامثل للمرحلة الاولى بعد حذف اعمدة المتغيرات الاصطناعية أي في مثالنا عمودي المتغيرين (**A1 , A2** ) , وأعتماد معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف مع ملاحظة اعادة حساب قيم صف **Zj** - **Cj** باعتماد معاملات المتغيرات الاساسية في دالة الهدف وكالاتي:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **2** **3** **0 0**    | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|   **X1 X2 S1 S2**  |
| **4** |  **1 0 -2 1**  | **X1**  | **2** |
| **1** |  **0 1 1 -1**  | **X2**  | **3** |
| **Z= 11** |  **0 0 -1 -1**  | **Zj** - **Cj** |

حساب قيم صف **Zj** - **Cj** :

$Z\_{1}- C\_{1}= \left(\begin{matrix}2&3\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)- 2=0 $

$Z\_{2}- C\_{2}= \left(\begin{matrix}2&3\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right)- 3=0 $

$Z\_{3}- C\_{3}= \left(\begin{matrix}2&3\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}-2\\ 1\end{matrix}\right)- 0=-1 $

$Z\_{4}- C\_{4}= \left(\begin{matrix}2&3\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} 1\\-1\end{matrix}\right)- 0=-1 $

 $Z= \left(\begin{matrix}2&3\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right)=11$

بملاحظة قيم صف **Zj** – **Cj** نجد انها اقل او تساوي الصفر لذا فأن هذا الحل الاساسي الممكن يمثل حلا امثلا, أي أن الحل الامثل هو :

**X1 = 4 X2 = 1 , Max. Z = 11**

**ملاحظة// في حالة عدة تحقق شروط الحل الامثل نستمر في تكوين حلول اساسية ممكن لحين الوصول للحل الامثل.**

**مثال(2):**

أوجد الحل اللمثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي :

Max. Z = 5X1 +3 X2

S.T.

X1 + X2 ≤ 12

 X1 + 4X2 ≥ 6

X1 , X2 ≥ 0

الصيغة القياسية تكون :

Max. Z = 5X1 + 3X2

S.T.

2X1 + X2 + S1  = 1

X1 + 4X2 – S2  + A1 = 6

X1 , X2, S1  , S2  , A1  ≥ 0

المرحلة الاولى ( Phase 1 ):

للمرحلة الاولى نكتب النموذج القياسي بدالة الهدف كالاتي:

Min. Z = -A1

S.T

2X1 + X2 + S1  = 1

X1 + 4X2 – S2  + A1 = 6

X1 , X2, S1  , S2  , A1  ≥ 0

نكون اول جدول مبسط للمرحلة الاولى

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **0** **0** **0 0 1**    | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|   **X1 X2 S1 S2 A1**  |
| **1** |  **2 ( 1) 1 0 0** |  **S1** |  **0** |
| **6** |  **1 4 0 -1 1**  | **A1**  | **-1** |
| **Z= 6** |  **-1 -4 0 1 0**  | **Zj** - **Cj** |

حساب قيم صف **Zj** - **Cj** : ( يترك كتمرين للطالب)

نختار حل اساسي جديد لان هذا الحل لايمثل حل امثل لوجود قيمة سالبة في صف **Zj** - **Cj** .

المتغير الداخل هو X2 ( لان الهدف تعظيم ), وعموده هو العمود المحوري , نحدد المتغير الخارج بعد حساب النسب ( R1 = 1 , R2 = 1.5 ) لذا فأن المتغير الخارج هو S1 , وصفه يمثل الصف المحوري والعنصر المحوري ( 1 ). نكون جدول الحل الاساسي الثاني:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **0** **0** **0 0 1**    | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|   **X1 X2 S1 S2 A1**  |
| **1** |  **2 1 1 0 0** |  **X2** |  **0** |
| **2** |  **-7 0 -4 -1 1**  | **A1**   | **-1** |
| **Z= 2** |  **7 0 4 1 0**  | **Zj** - **Cj** |

حساب قيم بقية الصفوف:

**A1** row = (**1 4 0 -1 1 6) – 4(2 1 1 0 0 1)**

 **= (-7 0 -4 -1 1 2)**

**Zj** - **Cj** row = (**-1 -4 0 1 0 6)- (-4) (2 1 1 0 0 1)**

 **= ( 7 0 4 1 0 2)**

قيم صف  **Zj** - **Cj** جميعها اكبر او تساوي الصفر لذا فان الحل يعتبر حل أمثل للمرحلة الاولى, ولكن نجد أن المتغير الاصطناعي **A1**  باقي ضمن المتغيرات الاساسية للحل الامثل , لذا فان نموذج البرمجة الخطية ليس له حل ممكن.