

تطبيق طريقة السمبلكس عندما تكون القيود من نوع أقل أو يساوي

سؤال: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي مستعملاً طريقة السمبلكس.

النموذج العام

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 4X_2$$

S.T.

$$6X_1 + 4X_2 \leq 24$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل : الخطوة (1): يتم تحويل الصيغة العامة الى الصيغة القياسية، وذلك بإضافة المتغيرات الوهمية (تظهر المتغيرات الوهمية في دالة الهدف بمعاملات مساوية للصفر بينما تظهر في القيود بمعاملات مساوية للواحد) ، والحصول على قيود من نوع متساويات ، وكما في ادناه:

النموذج القياسي

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

S.T.

$$6X_1 + 4X_2 + S_1 = 24$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 6$$

$$-X_1 + X_2 + S_3 = 1$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

الخطوة (2): نكون جدول السمبلكس رقم (1) بالاعتماد على النموذج في صيغته القياسية واستخراج قيمة (Z) وصف (Z_j - C_j) ، وفقاً للصيغتين الآتيتين:

$$(Z_j - C_j) = C_B * Y_j - C_j$$

$$Z = C_B * b$$

جدول السمبلكس رقم (1)

C_B	C_j Basic	5	4	0	0	0	b	Min. Ratio
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	6	4	1	0	0	24	24/6=4
0	S_2	1	2	0	1	0	6	6/1=6
0	S_3	-1	1	0	0	1	1	يهمل
$Z_j - C_j$		-5	-4	0	0	0	Z=0	

الخطوة (3): من خلال ملاحظة صف $(Z_j - C_j)$ في جدول السمبلكس رقم (1) ، نجده عبارة عن اصفار و قيم سالبة ، وطالما ظهرت القيم السالبة هذا يعني بأن الحل هو ليس حلاً أمثل لذا نقوم بتكوين جدول السمبلكس رقم (2) بعد ان نحدد المتغير الداخل والمتغير الخارج .

١. نحدد المتغير الداخل وهنا (X_1) هو المتغير الداخل لأنه يقابل في صف $(Z_j - C_j)$ أعلى قيمة (بالسالب).

٢. نحدد المتغير الخارج وهذا هو المتغير الخارج لأنه يقابل أقل قيمة في عمود (S_1) (Min. Ratio) (يتكون عمود (أقل حاصل قسمة) من خلال قسمة عمود الطرف الايمن b على عمود المتغير الداخل مع مراعاة كتابة عبارة يهمل في حال وجود قيمة سالبة او صفر في عمود المتغير الداخل).

الخطوة (4): نكون جدول السمبلكس رقم (2) بالاعتماد على الصف والعمود المحوري والذي تكون من خلال تقاطع المتغير الداخل والمتغير الخارج، وكما يلي:

سؤال: كيف يتم استخراج قيم جدول السمبلكس رقم (2)؟

الاجابة: يتم استخراج قيم جدول السمبلكس رقم (2) من خلال المرحلتين الآتية:

المرحلة رقم (1): يتم ايجاد اعمدة المتغيرات الاساسية (القيم المناظرة للمتغير في الصف والعمود مساوية للواحد و عدا ذلك تأخذ اصفار) في جدول السمبلكس رقم (2) ، و صف المتغير الداخل (يتم من خلال قسمة صف المتغير الداخل بأكمله على قيمة المحور ، وهنا قيمة المحور تساوي (6)).

جدول السمبلكس رقم (2)

C_B	C_j Basic	5	4	0	0	0	b	Min. Ratio
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
5	X_1	1	2/3	1/6	0	0	4	
0	S_2	0			1	0		
0	S_3	0			0	1		
$Z_j - C_j$		0			0	0	Z=	

المرحلة رقم (2): لايجاد الصف رقم (2) ، والصف رقم (3) : نعتمد في ذلك على صف المتغير الداخل في جدول السمبلكس رقم (2). اذ يتم كتابته بشكل كامل وهو الصف المناظر لصف المحور في جدول السمبلكس رقم (1) مع مراعاة تمييز العنصر المناظر للمحور وهو دائما يكون مساوي للواحد (السبب في ذلك تم تقسيم قيمة المحور على المحور فتكون النتيجة 1) وكما يلي:

1	2/3	1/6	0	0	4
---	-----	-----	---	---	---

بعدها اذا اردنا استخراج الصف رقم (2) في جدول السمبلكس رقم (2) نقوم بوضع قيم الصف الثاني في جدول السمبلكس رقم (1) اسفله (الصف الاول في جدول السمبلكس رقم (2)) مباشرة مع تغيير ما يلزم تغييره في الصف الاول لجدول السمبلكس رقم (2).

1	2	0	1	0	6
---	---	---	---	---	---

اما اذا اردنا استخراج الصف رقم (3) في جدول السمبلكس رقم (2) نقوم بوضع قيم الصف الثالث في جدول السمبلكس رقم (1) اسفله (الصف الاول في جدول السمبلكس رقم (2)) مباشرة مع تغيير ما يلزم تغييره في الصف الاول لجدول السمبلكس رقم (2).

-1	1	0	0	1	1
----	---	---	---	---	---

التطبيق الرياضي طبقاً لما تم ذكره في المرحلة رقم (2) بخصوص ايجاد الصف رقم (2) ، والصف رقم (3) وكما يلي:

بالنسبة للصف الثاني في جدول السمبلكس رقم (2) يتم استخراجه كما يلي:

1	2/3	1/6	0	0	4
1	2	0	1	0	6

نقوم بضرب الصف الاول في (سالبة واحد) (نفس الرقم) (اسفل رقم واحد المناظر لعنصر المحور)
(عكس الاشارة))

-1	-2/3	-1/6	0	0	-4
1	2	0	1	0	6

بعدها نقوم بالجمع للرقمين والنتائج يمثل قيم الصف الثاني في جدول السمبلكس رقم (2).

-1	-2/3	-1/6	0	0	-4
1	2	0	1	0	6
0	$\frac{-2}{3} + \frac{6}{3} = \frac{4}{3}$	-1/6	1	0	2

بالنسبة للصف الثالث في جدول السمبلكس رقم (2) يتم استخراجها كما يلي:

1	2/3	1/6	0	0	4
-1	1	0	0	1	1

نقوم بضرب الصف الاول في (موجب واحد) (نفس الرقم) (اسفل رقم واحد المناظر لعنصر المحور)
(عكس الاشارة))

بعدها نقوم بالجمع للرقمين والنتائج يمثل قيم الصف الثالث في جدول السمبلكس رقم (2).

1	2/3	1/6	0	0	4
-1	1	0	0	1	1
0	5/3	1/6	0	1	5

جدول السمبلكس رقم (2)

C_B	C_j Basic	5	4	0	0	0	b	Min. Ratio
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
5	X_1	1	2/3	1/6	0	0	4	6
0	S_2	0	4/3	-1/6	1	0	2	1.5
0	S_3	0	5/3	1/6	0	1	5	3
$Z_j - C_j$		0	-2/3	5/6	0	0	Z=20	

استخراج بقية قيم صف $Z_j - C_j$ بالاعتماد على الصيغتين المشار اليهما في الخطوة رقم (2)

$$Z_2 - C_2 = [5 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} - 4 = \frac{10}{3} - \frac{12}{3} = \frac{-2}{3}$$

ملاحظة: بتكرار ذات الخطوات التي تمت عند الانتقال من جدول السمبلكس رقم (1) الى الجدول السمبلكس رقم (2) ، بدءاً من الخطوة رقم (2) (السبب في ذلك وجود قيمة سالبة في صف $Z_j - C_j$ ، مع مراعاة تطبيق هذه الخطوات لكل نموذج برمجة خطية عند الانتقال من جدول الى جدول اخر في حال عدم الوصول للحل الامثل عند استعمال الحل بطريقة السمبلكس).

جدول السمبلكس رقم (3)

C_B	C_j Basic	5	4	0	0	0	b	Min. Ratio
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
5	X_1	1	0	1/4	-1/2	0	3	
4	X_2	0	1	-1/8	3/4	0	3/2	
0	S_3	0	0	3/8	-5/4	1	5/2	
$Z_j - C_j$		0	0	3/4	1/2	0	Z=21	

الحل الامثل هو:

$$X_1 = 3$$

$$X_2 = 1.5$$

$$S_3 = 2.5$$

$$Z = 21$$

حل السؤال : بالاعتماد على برنامج (WinQSB) ، وفقاً للمسار الآتي:

START → **All Programs** → **WinQSB**
→ **Linear and Integer Programming**

اولاً: ادخال البيانات في برنامج WinQSB وكما في ادناه:

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	5	4		
C1	6	4	<=	24
C2	1	2	<=	6
C3	-1	1	<=	1
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

ثانياً : ايجاد الحل الأمثل

11:14:25		Thursday	March	22	2018			
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)	
1	X1	3.0000	5.0000	15.0000	0	basic	2.0000	6.0000
2	X2	1.5000	4.0000	6.0000	0	basic	3.3333	10.0000
	Objective	Function	(Max.) =	21.0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS	
1	C1	24.0000	<=	24.0000	0	0.7500	17.3333	36.0000
2	C2	6.0000	<=	6.0000	0	0.5000	4.0000	8.0000
3	C3	-1.5000	<=	1.0000	2.5000	0	-1.5000	M

الحل الأمثل بالاعتماد على البرنامج المذكور.

$$X_1 = 3$$

$$X_2 = 1.5$$

$$S_3 = 2.5$$

$$Z = 21$$

تطبيق طريقة السمبلكس عندما تكون القيود من نوع أقل أو يساوي

مثال (26): ص (58)

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\text{Max. } Z = 10X_1 + 12X_2$$

S.T.

$$2X_1 + 3X_2 \leq 15$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 16$$

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل : الخطوة (1): يتم تحويل الصيغة القانونية الى الصيغة القياسية، وذلك بإضافة المتغيرات الوهمية والحصول على قيود من نوع متساويات.

$$\text{Max. } Z = 10X_1 + 12X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

S.T.

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 15$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 16$$

$$X_1 + X_2 + S_3 = 6$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

الخطوة (2): نكون جدول السمبلكس رقم (1) بالاعتماد على النموذج في صيغته القياسية واستخراج قيمة (Z) وصف للصيغتين الآتيتين:

$$(Z_j - C_j) = C_B * Y_j - C_j$$

$$Z = C_B * b$$

C_B	C_j Basic	10	12	0	0	0	B R.H.S	Min. Ratio
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	2	3	1	0	0	15	15/3=5
0	S_2	3	2	0	1	0	16	16/2=8
0	S_3	1	1	0	0	1	6	6/1=6
$Z_j - C_j$		$Z_1 - C_1$ -10	$Z_2 - C_2$ -12	$Z_3 - C_3$ 0	$Z_4 - C_4$ 0	$Z_5 - C_5$ 0	Z = 0	

جدول السمبلكس رقم (2)

C_B	C_j Basic	10	12	0	0	0	B R.H.S	Min. Ratio
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
12	X_2	2/3	1	1/3	0	0	5	15/2=7.5
0	S_2	5/3	0	-2/3	1	0	6	18/5=3.6
0	S_3	1/3	0	-1/3	0	1	1	3
$Z_j - C_j$		$Z_1 - C_1$ -2	$Z_2 - C_2$ 0	$Z_3 - C_3$ 4	$Z_4 - C_4$ 0	$Z_5 - C_5$ 0	Z = 60	

جدول السمبلكس رقم (3)

C_B	C_j Basic	10	12	0	0	0	B R.H.S	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
12	X_2	0	1	1	0	-2	3	
0	S_2	0	0	1	1	-5	1	
10	X_1	1	0	-1	0	3	3	
$Z_j - C_j$		$Z_1 - C_1$ 0	$Z_2 - C_2$ 0	$Z_3 - C_3$ 2	$Z_4 - C_4$ 0	$Z_5 - C_5$ 6	Z = 66	

إذاً الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 3, X_2 = 3, S_2 = 1$$

$$Z = 66$$