

❖ صياغة وبناء نموذج البرمجة الخطية

لغرض تكوين نموذج برمجة خطية بمعنى تحويل السرد الكلامي للمشكلة الى نموذج برمجة خطية يتطلب الامر تحديد الاتي:

١. تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.
٢. تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات او متباينات او خليط منها.
٣. تحديد دالة الهدف.

تكوين نموذج برمجة خطية		
دالة الهدف	القيود	المتغيرات
Maximize	قيود من نوع اقل من او يساوي \leq	X_1, X_2, \dots, X_n
Minimize	قيود من نوع اكبر من او يساوي \geq	
	قيود من نوع مساواة $=$	
	قيود عدم السالبية	

مثال رقم (1): تنتج احدى الشركات نوعين من السلع ، نوع A ، ونوع B ، تصنع كل سلعة على ثلاثة مراحل وكل مرحلة تتم في احد الاقسام الثلاثة الموجودة في الشركة. فإذا كان تصنيع السلعة من النوع A يحتاج الى ساعتين عمل في القسم الاول وساعة عمل في القسم الثاني واربع ساعات عمل في القسم الثالث ، بينما يحتاج تصنيع السلعة من النوع B الى ساعتين عمل في كل قسم ، كما ان عدد الساعات المتاحة في القسم الاول هي (160) ساعة عمل اسبوعياً ، و في القسم الثاني هي (120) ساعة عمل اسبوعياً ، و في القسم الاول هي (280) ساعة عمل اسبوعياً. فإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو (2) دينار ، و من السلعة B هو (3) دينار.

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ، اذا كان هدف الشركة هو الحصول على اكبر ربح ممكن.

بحوث العمليات

م.م. ليث فاضل سيد حسين

الحل: من خلال معطيات السؤال يمكن وضع المعطيات بالجدول ادناه.

ربح الوحدة الواحدة	القسم III	القسم II	القسم I	السلعة
2	4	1	2	نوع A
3	2	2	2	نوع B
	280	120	160	الوقت المتاح لكل قسم

تكوين النموذج

الخطوة رقم (1) : تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.

- نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من السلعة A = X_1

- نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من السلعة B = X_2

الخطوة رقم (2) : تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات او متباينات او خليط منها.

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 120$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 280$$

قيود عدم السالبة (طالما عدد الوحدات المنتجة لا يمكن ان تكون سالبة)

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الخطوة رقم (3) : تحديد دالة الهدف.

$$\text{Max. } Z = 2X_1 + 3X_2$$

النموذج بصيغته النهائية يكون كالاتي:

$$\text{Max. } Z = 2X_1 + 3X_2$$

Subject to constraints

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 120$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 280$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

بحوث العمليات

م.م. ليث فاضل سيد حسين

مثال رقم (2): شركة شحن تمتلك نوعين من الشاحنات ، نوع A ، ونوع B ، كل شاحنة من النوع A فيها (20 m³) من الحيز المبرد و (30 m³) من الحيز غير المبرد ، بينما كل شاحنة من النوع B فيها (20 m³) من الحيز المبرد و (10 m³) من الحيز غير المبرد. اراد احد التجار شحن كمية من البضاعة لمسافة معينة وكانت بضاعته تتطلب (160 m³) من الحيز المبرد و (120 m³) من الحيز غير المبرد ، واذا كانت الشركة تعلم بأن كل شاحنة من النوع A تستهلك (300) غالون من الوقود لقطع المسافة بينما كل شاحنة من النوع B تستهلك (200) غالون من الوقود نفسه لقطع ذات المسافة.

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ، اذا كان هدف الشركة هو الحصول على اقل ما يمكن من كمية الوقود المستهلكة.

الحل : من خلال المعطيات يمكن توضيحها بالجدول الاتي:

كمية الوقود المستهلكة	الحيز غير المبرد	الحيز المبرد	الشاحنات
300	30	20	نوع A
200	10	20	نوع B
	120	160	البضاعة المراد نقلها

تكوين النموذج

الخطوة رقم (1) : تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.

- نفرض ان عدد الشاحنات من النوع A = X₁

- نفرض ان عدد الشاحنات من النوع B = X₂

الخطوة رقم (2) : تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات او متباينات او خليط منها.

$$20X_1 + 20X_2 \leq 160$$

$$30X_1 + 10X_2 \leq 120$$

قيد عدم السالبة (طالما عدد الوحدات المنتجة لا يمكن ان تكون سالبة)

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الخطوة رقم (3) : تحديد دالة الهدف.

$$\text{Min. } Z = 300X_1 + 200X_2$$

النموذج بصيغته النهائية يكون كآلاتي:

$$\text{Min. } Z = 300X_1 + 200X_2$$

S. to

$$20X_1 + 20X_2 \leq 160$$

$$30X_1 + 10X_2 \leq 120$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال رقم (3): مصنع للأحذية ينتج ثلاثة أنواع من الأحذية (الرجالية ، والنسائية ، والاطفال) وباستخدام نوعين من الجلود علماً ان الكمية المتوفرة في المعمل من كل نوع من الجلود هي (1500) وحدة من النوع الاول ، و (2000) وحدة من النوع الثاني على التوالي، الجدول الآتي يبين الكمية المطلوبة من كل نوع من انواع الجلود لإنتاج المنتجات الثلاثة من الاحذية.

الجلود	احذية رجالية	احذية نسائية	احذية اطفال
A	5	3	2
B	7	4	2

فإذا كان الوقت المطلوب لإنتاج كل وحدة من الاحذية الرجالية هو ضعف الوقت المطلوب لإنتاج وحدة واحدة من الاحذية النسائية وثلاثة امثال الوقت المطلوب لوحدة واحدة من احذية الاطفال ، بينما كانت الطاقة الكلية التشغيلية للمصنع تستطيع ان تنتج ما يكافئ (800) وحدة من الاحذية ، وقد اشارت دراسة للسوق الى ان الحد الأدنى المطلوب من كل نوع هو (400) وحدة من الاحذية الرجالية ، و (300) وحدة من الاحذية النسائية ، و (200) وحدة من احذية الاطفال.

فإذا كان ربح الوحدة الواحدة من الاحذية الرجالية هو (1500) دينار ، والنسائية (1200) دينار ، والاطفال (1000) دينار.

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ، اذا كان هدف المصنع هو الحصول على اكبر ربح ممكن.

الخطوة رقم (1) : تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.

- نفرض ان عدد الوحدات المصنوعة من الاحذية الرجالية = X_1

- نفرض ان عدد الوحدات المصنوعة من الاحذية النسائية = X_2

- نفرض ان عدد الوحدات المصنوعة من احذية الاطفال = X_3

الخطوة رقم (2) : تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات او متباينات او خليط منها.

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 1500$$

$$7X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 2000$$

$$X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 \leq 800$$

$$X_1 \geq 400$$

$$X_2 \geq 300$$

$$X_3 \geq 200$$

قيود عدم السالبة (طالما عدد الوحدات المنتجة لا يمكن ان تكون سالبة)

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الخطوة رقم (3) : تحديد دالة الهدف.

$$\text{Max. } Z = 1500X_1 + 1200X_2 + 1000X_3$$

النموذج بصيغته النهائية يكون كالاتي:

$$\text{Max. } Z = 1500X_1 + 1200X_2 + 1000X_3$$

S. to

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 1500$$

$$7X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 2000$$

$$X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 \leq 800$$

$$X_1 \geq 400$$

$$X_2 \geq 300$$

$$X_3 \geq 200$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

بحوث العمليات

م.م. ليث فاضل سيد حسين

مثال رقم (4): معمل يقوم بإنتاج نوعين من الخزانات ، نوع A ، ونوع B ، وكل نوع بماكينة معينة. الماكينة الاولى لقطع الصفائح وطاققتها التشغيلية (70) ساعة اسبوعياً ، والماكينة الثانية لطي و وصل الصفائح وطاققتها التشغيلية (60) ساعة اسبوعياً ، إذا علمت ان النوع (A) يحتاج (4) ساعات على الماكينة الاولى ، و (10) ساعات على الماكينة الثانية ، و النوع (B) يحتاج (5) ساعات على الماكينة الاولى ، و (6) ساعات على الماكينة الثانية.

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ، اذا كان هدف المعمل هو الحصول على اعلى ربح ممكن ، اذا علمت ان ربح الخزان الواحد من النوع (A) هو (3) دينار ، و ربح الخزان الواحد من النوع (B) هو (6) دينار.

الحل : من خلال المعطيات نكون الجدول الاتي:

الخزانات	الوقت الازم لتشغيل الماكينة ١	الوقت الازم لتشغيل الماكينة ٢	ربح الخزان الواحد
نوع A	4	10	3
نوع B	5	6	6
الطاقة التشغيلية	70	60	

تكوين النموذج

الخطوة رقم (1) : تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.

- نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من النوع A = X_1

- نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من النوع B = X_2

النموذج بصيغته النهائية يكون كالاتي:

$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 6X_2$$

S. to

$$4X_1 + 5X_2 \leq 70$$

$$10X_1 + 6X_2 \leq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

بحوث العمليات

م.م. ليث فاضل سيد حسين

مثال رقم (5): جمعية فلاحية تمتلك قطعة ارض مساحتها (200) دونم تستطيع زراعتها بنوعين من المحاصيل نوع A ، ونوع B . فإذا كانت زراعة الدونم الواحد من الارض بالمحصول A يتطلب يوم عمل واحد ، و (10) دينار من المصاريف، بينما زراعة الدونم الواحد من الارض بالمحصول B يتطلب اربعة ايام عمل ، و (20) دينار من المصاريف، وتعلم الجمعية انها تربح (40) دينار عن كل دونم يزرع بالمحصول A ، و تربح (60) دينار عن كل دونم يزرع بالمحصول B . وان عدد ايام العمل السنوية المتوفرة للجمعية يساوي (320) يوم عمل ورأس المال المتوفر للجمعية (2200) دينار.

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ، اذا كان هدف الجمعية هو الحصول على اكبر ربح ممكن.

الحل: من خلال المعطيات نكون الجدول الاتي مع مراعاة ان مساحة الارض الممكن زراعتها هو (200) دونم:

المحاصيل	الوقت اللازم لزراعة دونم واحد	المصاريف اللازمة لزراعة دونم واحد	الربح الممكن
نوع A	1	10	40
نوع B	4	20	60
الطاقة التشغيلية		2200	320

الخطوة رقم (1) : تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.

- نفرض ان عدد الدونمات التي تزرع بالمحصول من النوع A = X_1

- نفرض ان عدد الدونمات التي تزرع بالمحصول من النوع B = X_2

النموذج بصيغته النهائية يكون كالاتي:

$$\text{Max. } Z = 40X_1 + 60X_2$$

S. to

$$X_1 + 4X_2 \leq 320$$

$$10X_1 + 20X_2 \leq 2200$$

$$X_1 + X_2 \leq 200$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

بحوث العمليات

م.م. ليث فاضل سيد حسين

مثال رقم (6): يقوم معمل ادوية بإنتاج نوع معين من العقاقير الطبية التي تحتوي على عدد من الفيتامينات وذلك بخلط ثلاث مكونات ، (A₁) ، و (A₂) ، و (A₃) . يحتوي مكون A₁ على وزن واحد من فيتامين (B) وعشر اوزان من فيتامين (D) و اثنان من الاوزان من فيتامين (C) ، و يحتوي مكون A₂ على اثنان من الاوزان من فيتامين (B) وثمان اوزان من فيتامين (D) و اثنان من الاوزان من فيتامين (C) ، و يحتوي مكون A₃ على وزن واحد من فيتامين (B) واربعة اوزان من فيتامين (D) و لا يحتوي على فيتامين (C) ، وان الحد الادنى المطلوب من عدد الاوزان هو (100) وزن من فيتامين (D) ، و (8) اوزان من فيتامين (B) ، و (32) وزن من فيتامين (C) . وان سعر الوحدة الواحدة من A₁ هو (2) دينار ، ومن A₂ هو (3) دينار ، ومن A₃ هو (4) دينار.

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ، اذا كان هدف المعمل هو الحصول على اقل كلفة ممكنة.

الحل : من خلال المعطيات نكون الجدول الاتي:

سعر الوحدة الواحدة	فيتامين D	فيتامين C	فيتامين B	المكونات
2	10	2	1	نوع A1
3	8	2	2	نوع A2
4	4	0	1	نوع A3
				الكمية المطلوبة
				100
				32
				8

الخطوة رقم (1) : تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.

- نفرض ان عدد الوحدات من النوع A₁ = X₁

- نفرض ان عدد الوحدات من النوع A₂ = X₂

- نفرض ان عدد الوحدات من النوع A₃ = X₃

النموذج بصيغته النهائية يكون كالاتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

S. to

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 8$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 32$$

$$10X_1 + 8X_2 + 4X_3 \geq 100$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

بحوث العمليات

م.م. ليث فاضل سيد حسين

مثال رقم (7): شركة تنتج نوعين من الاغذية لبناء جسم صحي ، تكلف النوعية الاولى (\$)3 ، وتعطي (2) وحدة من فيتامين (A) و (2) وحدة من فيتامين (C) ، و (8) وحدات من فيتامين (D) ، بينما تكلف النوعية الثانية (\$)4 ، وتعطي (3) وحدات من فيتامين (A) و (2) وحدة من فيتامين (C) ، و (2) وحدة من فيتامين (D) ، وان الكمية الكلية لعدد الوحدات هي (36) وحدة من فيتامين (A) ، و(28) وحدة من فيتامين (C) ، و (32) وحدة من فيتامين (D).

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ، اذا كان هدف الشركة هو الحصول على اقل كلفة ممكنة.

الحل : من خلال المعطيات نكون الجدول الاتي:

الاغذية	فيتامين A	فيتامين C	فيتامين D	الكلفة
نوع 1	2	2	8	3
نوع 2	3	2	2	4
الكمية المطلوبة	36	28	32	

الخطوة رقم (1) : تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.

- نفرض ان عدد الاغذية من النوع الاول = X_1

- نفرض ان عدد الاغذية من النوع الثاني = X_2

النموذج بصيغته النهائية يكون كالاتي:

$$\text{Min. } Z = 3X_1 + 4X_2$$

S. to

$$2X_1 + 3X_2 \geq 36$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 28$$

$$8X_1 + 2X_2 \geq 32$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

بحوث العمليات

م.م. ليث فاضل سيد حسين

مثال رقم (8): ينتج مصنع الامين نوعين من الفولاذ ، نوع A ، ونوع B ، ويتطلب النوع A (2) ساعة للصهر ، و (4) ساعات للصب ، و (5) ساعات للقطع ، اما النوع B يحتاج الى (5) ساعة للصهر ، و (1) ساعة للصب ، و (5) ساعات للقطع ، وان هناك (40) ساعة متاحة للصهر ، و (20) ساعة للصب ، و (60) ساعة للقطع ، وان ربح الوحدة الواحدة من النوع A هو (24) دينار ، ومن النوع الثاني (8) دينار.

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ، اذا كان هدف المصنع هو الحصول على اعلى ربح ممكن.

الحل : من خلال المعطيات نكون الجدول الاتي:

الربح	القطع	الصب	الصهر	الفولاذ
24	10	4	2	نوع A
8	5	1	5	نوع B
الوقت المتاح				
60	20	40		

الخطوة رقم (1) : تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.

- نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من النوع A = X_1

- نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من النوع B = X_2

النموذج بصيغته النهائية يكون كالاتي:

$$\text{Max. } Z = 24X_1 + 8X_2$$

S. to

$$2X_1 + 5X_2 \leq 40$$

$$4X_1 + X_2 \leq 20$$

$$10X_1 + 5X_2 \leq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

بحوث العمليات

م.م. ليث فاضل سيد حسين

مثال رقم (9): اراد مستثمر بناء معمل صغير لإنتاج نوعين من البلوزات ، الاول نسائي حيث كان سعر السوق يصل الى (15) دينار ، والآخر رجالي بسعر (12) دينار وان انتاج النوعين من البلوزات يمر بثلاث اقسام انتاجية ، قسم الغزل والذي لا تتجاوز طاقته الانتاجية (45) ساعة عمل للدورة الواحدة وان البلوز النسائي يحتاج الى (3) ساعات عمل في هذا القسم اما البلوز الرجالي يحتاج الى (6) ساعات عمل ، وان قسم النسيج والذي تبلغ طاقته الانتاجية بحدود (48) ساعة عمل للدورة الانتاجية الواحدة وان البلوز النسائي يحتاج الى (6) ساعات عمل في هذا القسم في حين البلوز الرجالي يحتاج الى (3) ساعات عمل ، وان قسم التجهيز والذي تعبئته محددة بطاقة (95) ساعة عمل للدورة الواحدة بواقع (9) ساعات عمل لكل من البلوز النسائي و البلوز الرجالي.

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ، اذا كان هدف المستثمر هو الحصول على اكبر ربح ممكن.
الحل : من خلال المعطيات نكون الجدول الاتي:

المعمل	قسم الغزل	قسم النسيج	قسم التجهيز	الربح
بلوز نسائي	3	6	9	15
بلوز رجالي	6	3	9	12
الطاقة الانتاجية	45	48	90	

الخطوة رقم (1) : تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية.

- نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من البلوز النسائي = X_1

- نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من البلوز الرجالي = X_2

النموذج بصيغته النهائية يكون كالاتي:

$$\text{Max. } Z = 15X_1 + 12X_2$$

S. to

$$3X_1 + 6X_2 \leq 45$$

$$6X_1 + 3X_2 \leq 48$$

$$9X_1 + 9X_2 \leq 90$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$