

الفصل الثاني - رسم الدوال

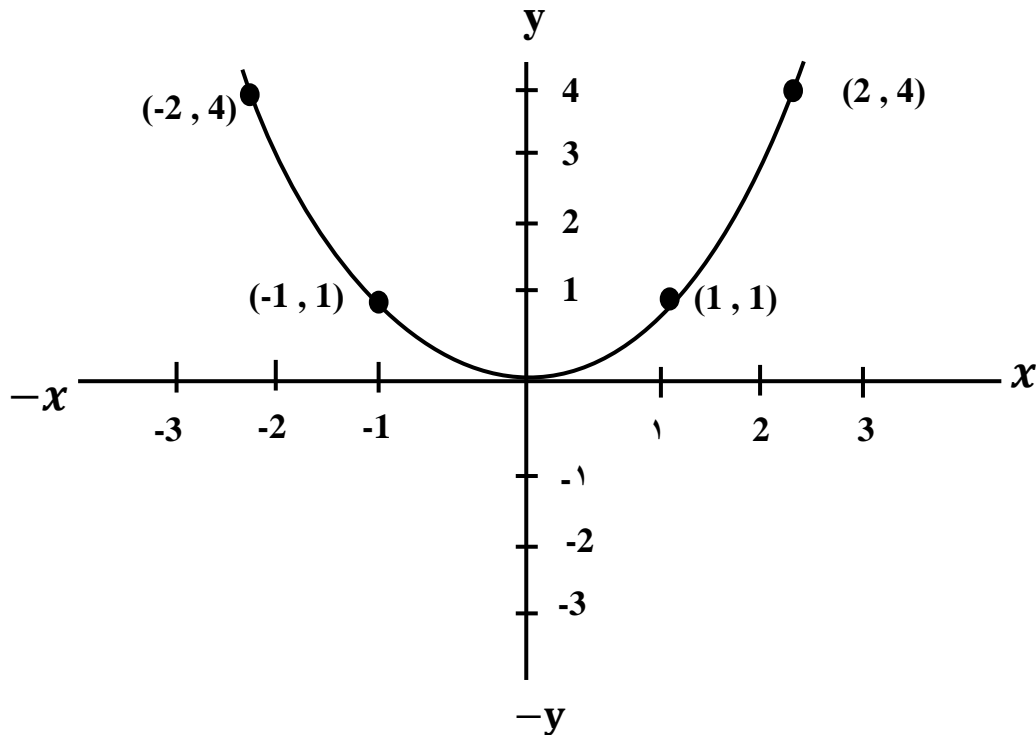
لتكن f أي دالة $y = f(x)$ ويعرف مخطط الدالة f بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x, y) . حيث أن كل زوج من هذه الأعداد يُقابل نقطة في المستوى، فإن مخطط الدالة يعطي مجموعة نقاط في المستوى.

من المعتاد تمثيل مُنطلق الدالة بمجموعة النقاط التي تقع على المحور الأفقي x ، أما مدى الدالة فيجري تمثيله بمجموعة النقاط التي تقع على المحور العمودي y وللتوضيح نأخذ الأمثلة الآتية:

مثال: ارسم مخطط الدالة الآتية:

$$f(x) = x^2$$

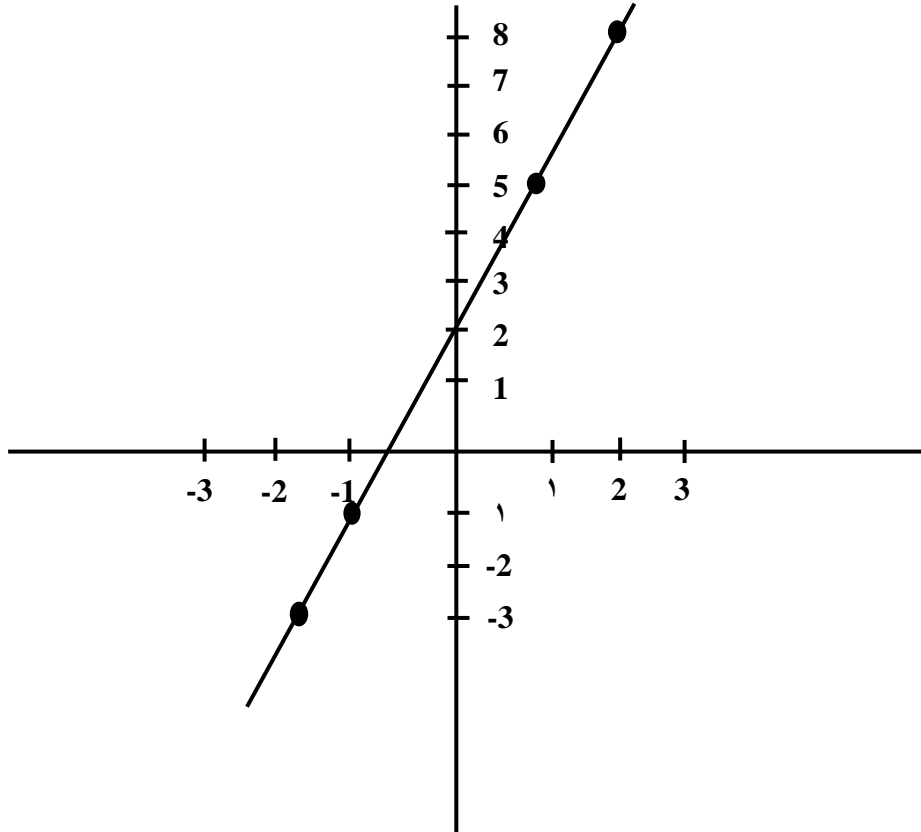
x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x) = x^2$	4	1	0	1	4



مثال: ارسم مخطط الدالة الآتية:

$$f(x) = 3x + 2$$

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x) = 3x + 2$	-4	-1	2	5	8



مثال: شركة لتأجير السيارات الصغيرة، تؤجر السيارة بـ 10 دنانير لليوم للواحد و 100 فلس عن كل كيلو متر تسير به السيارة.

أ- عبّر عن هذه الكلفة اليومية لاستئجار السيارة كدالة $C(x)$ لعدد الكيلو مترات المقطوعة (x) .

ب- أحد الأشخاص أجر سيارة صغيرة ليومين وساقها 42 كيلو متر لليوم الواحد، احسب أجرة هذه السيارة؟

حل فرع أ

$f(x)$

الكلفة المتغيرة + الكلفة الثابتة = $c(x)$

↓
cost

نفرض عدد الكيلو مترات = x

$$\frac{100 \text{ فلس}}{1000 \text{ فلس}} = 0.1 \text{ دينار}$$

$$c(x) = 10 + 0.1x$$

دالة الكلفة

حل فرع ب:

(٢) يومين

1 1

$$10 + 0.1(42)$$

$$4.2$$

$$= 14.2$$

كلفة اليوم الواحد

$$14.2 \times 2 = 28.4$$

كلفة اليومين لأنه نفس المسافة خلال اليومين

مثال: إحدى الشركات الصناعية استعانت بخبير لتحديد دالة الكلفة، فلاحظ الخبير من خلال دراسة حسابات الشركة أن التكاليف الثابتة هي 10000 دينار سنوياً والتكاليف المتغيرة هي 0.030 للوحدة الواحدة، الطاقة الحالية القصوى للمصنع هي 50000 وحدة شهرياً أو 600000 وحدة سنوياً.

أوجد دالة الكلفة وعرّف منطلق الدالة ومداهها ومن ثم عيّن ميل الدالة ونقطة تقاطع منحنى الدالة مع y ؟

كلفة الانتاج سنوياً

$$1) \quad c(x) = 10000 + 0.030x$$

كلفة ثابتة كلفة متغيرة

نفرض عدد الوحدات المنتجة = x

للتوضيح:

$$c(0) = 10000 + 0.030(0) = 10000$$

لم ينتج ولا وحدة

$$c(1) = 10000 + 0.030(1) = 10000.03$$

انتج قطعة واحدة

⋮

$$c(600000) = 10000 + 0.030(600000)$$

$$= 10000 + 18$$

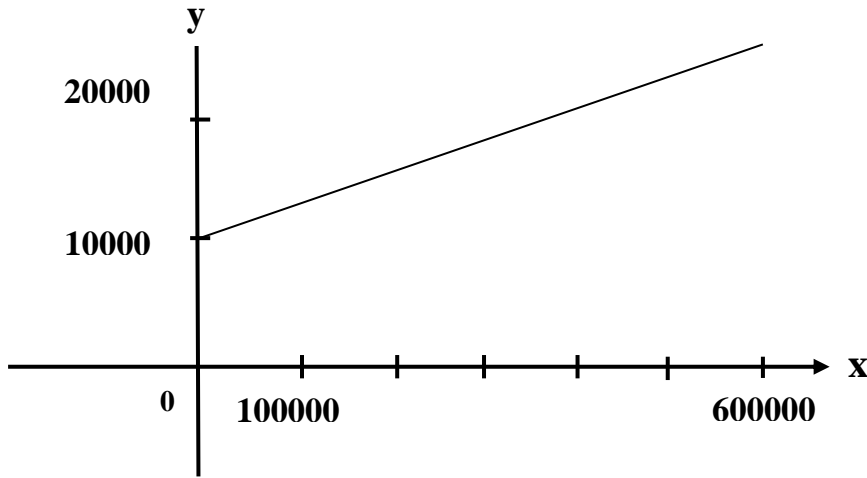
$$= 28000$$

2)

المجال X	المجال المقابل أو المدى y
0	10000
⋮	
600000	28000

$$x = 0 \rightarrow 60000 \text{ المجال}$$

$$y = 10000 \rightarrow 28000 \text{ المجال المقابل}$$



ميل الدالة هو الرقم المضروب ب x في دالة الكلفة (0.030)
 نقطة تقاطع منحنى دالة الكلفة مع y هي الجزء الثابت في دالة الكلفة (0, 10000).
 ملاحظة: ويمكن حل السؤال على اساس كلفة الانتاج شهرياً.

واجب: شركة لإنتاج أجهزة التكييف، تدعي بأن الكلفة الكلية لإنتاج x من وحدات التكييف تتبع الدالة الآتية:

$$c(x) = 2000 + 100x$$

المطلوب:

- (١) جد قيمة التكاليف الثابتة.
- (٢) جد كلفة انتاج 5 أجهزة تكييف.
- (٣) إذا كان الحد الأدنى للإنتاج هو 2 أجهزة والحد الأقصى للإنتاج هو 10 أجهزة ، فجد المنطلق والمدى.
- (٤) جد الميل ونقطة تقاطع منحنى الدالة مع y .
- (٥) على فرض أن الحد الأدنى لإنتاج الشركة هي 3 جهاز تكييف والحد الأقصى للإنتاج هو 12 جهاز تكييف، جد المنطلق والمدى (المجال والمجال المقابل).

Sol:

(١) التكاليف الثابتة = 2000

(٢) نفرض أن عدد الوحدات المنتجة = x :

$x = 5$

$$\begin{aligned} c(5) &= 2000 + 100(5) \\ &= 2000 + 500 \\ &= 2500 \end{aligned}$$

x	y
2	2200
.	.
.	.
.	.
10	3000

(٣) $c(2) = 2000 + 100(2)$
 $= 2200$

$c(10) = 2000 + 100(10)$
 $= 3000$

المجال $x : 2 \rightarrow 10$
المجال المقابل $y : 2200 \rightarrow 3000$

(٤) ميل الدالة = 100 [العدد المضروب مع x]
نقطة تقاطع الدالة مع $y = (0, 2000)$

(٥) على فرض أن الحد الأدنى لإنتاج الشركة هي 3 جهاز تكييف والحد الأقصى للإنتاج هو 12 جهاز تكييف، جد المنطلق والمدى (المجال والمجال المقابل).

x	$y = c(x) = 2000 + 100x$
3	2300
.	.
.	.
12	3200

المجال $x : 3 \Rightarrow 12$
المجال المقابل $y : 2300 \Rightarrow 3200$

مثال : أراد باحث دراسة دالة الكلفة الإنتاجية لإحدى الشركات الصناعية الصغيرة ومن خلال متابعته للإنتاج تبين له ما يأتي:

* مُعدّل الكلفة الإنتاجية لإنتاج (9) وحدات هو (8500) دينار.

* مُعدّل الكلفة الإنتاجية لإنتاج (10) وحدات هو (8000) دينار.

* معدل الكلفة الإنتاجية لإنتاج (12) وحدة هو (8250) دينار.

المطلوب:

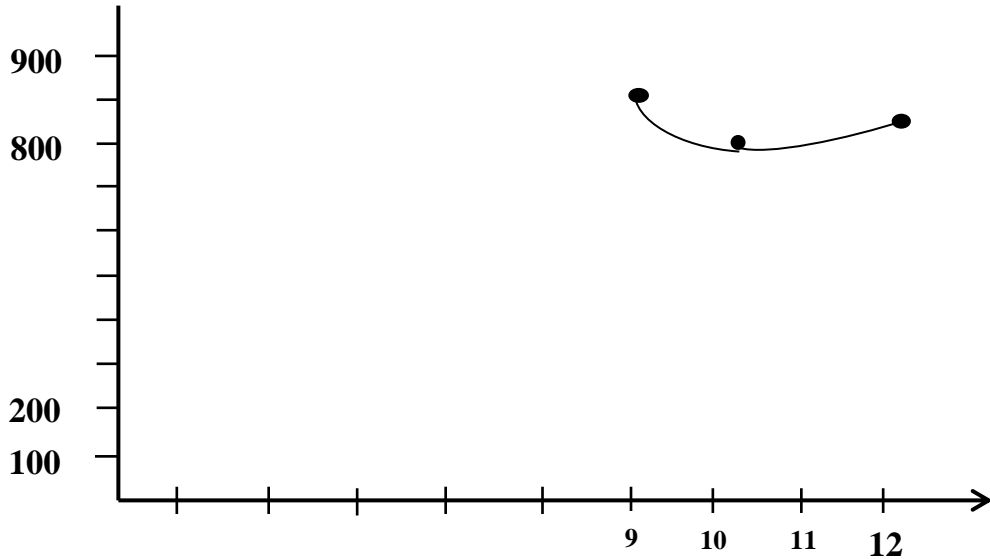
(١) جد نوع الكلفة الإنتاجية وصيغتها.

(٢) احسب قيم ثوابت دالة الإنتاج.

Sol:

x	$y = C(x)$
9	8500
10	8000
12	8250
مجال	مجال مقابل

نرسم المعادلة ومن الرسم تبين أنّ:



بما أن درجة المعادلة = عدد حالات التحدّب والتقعّر + ١

∴ درجة المعادلة = ١ + ١ = ٢

∴ دالة الكلفة هي معادلة من الدرجة الثانية (تربيعية)

$$C(x) = ax^2 + bx + c$$

$$C(9) = 81a + 9b + c \rightarrow 8500 = 81a + 9b + c \dots\dots(1)$$

$$C(10) = 100a + 10b + c \rightarrow 8000 = 100a + 10b + c \dots\dots(2)$$

$$C(12) = 144a + 12b + c \rightarrow 8250 = 144a + 12b + c \dots\dots(3)$$

ويتم حل المعادلات آنياً لاستخراج قيم الـ a, b, c .

وبهذا نحصل على القيم $c = 31.57$ ، $b = -4.458$ ، $a = 0.2083$ وعليه ستكون معادلة الكلفة هي:

$$C(x) = 31.75 - 4.458x + 0.2083x^2$$