

مقاييس التشتت (Measures of dispersion)

أولاً: مقاييس التشتت المطلقة (Absolute measures of dispersion) مؤشرات إحصائية تستخدم لقياس درجة التباعد أو الاختلاف (مدى التجانس) بين مفردات الظاهرة الواحدة. وهي عدّة أنواع هي:

أ. المدى (Range): أبسط مقاييس التشتت المطلقة وأقلها دقة ، وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للبيانات الغير مبوبة. أما للبيانات المبوبة فهو عبارة عن الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى.

$$R = X_L - X_S$$

حيث أن R : المدى.

X_L : أكبر قيمة.

X_S : أصغر قيمة.

ب. الانحراف الربيعي (Quartile Deviation): وهو عبارة عن متوسط الفرق بين الربع الثالث والربع الأول. أي أن

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

حيث أن $Q.D.$: الانحراف الربيعي.

Q_1 : الربع الأول.

Q_3 : الربع الثالث.

1. حساب الانحراف الربيعي للبيانات الغير مبوبة

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n قيم متغير عشوائي والتي تمثل قياسات عينة قوامها (n) ، فلحساب الانحراف الربيعي لهذه القيم نتبع ما يلي:

أ. حساب قيمة الربع الأول و الربع الثالث بعد ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً ، حيث أن:

Q_1 : القيمة التي ترتيبها $\frac{n}{4}$

Q_3 : القيمة التي ترتيبها $\frac{3n}{4}$

ب. حساب الانحراف الربيعي وفق الصيغة

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

مثال (1): البيانات التالية تمثل اوزان ثمانيه اشخاص ، والمطلوب حساب درجة التشتت بين اوزان هؤلاء الاشخاص باستخدام.

1. المدى. 2. الانحراف الربيعي.

X_i	56	68	72	63	68	71	69	62
-------	----	----	----	----	----	----	----	----

1. المدى:

$$R = X_L - X_S$$

$$R = 72 - 56 = 16$$

2. الانحراف الربيعي:

ترتيب القيم تصاعدياً

X_i	56	62	63	68	68	69	71	72
-------	----	----	----	----	----	----	----	----

$$\text{ترتيب الربع الاول} = \frac{n}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\therefore Q_1 = 62$$

$$\text{ترتيب الربع الثالث} = \frac{3n}{4} = \frac{3(8)}{4} = 6$$

$$\therefore Q_1 = 69$$

$$\therefore Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{69 - 62}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

2. حساب الانحراف الربيعي لبيانات مبوبة (التوزيعات التكرارية):

أ. حساب قيمة الربع الأول و كالتالي:

1. عمل توزيع تكراري متجمع صاعد.

2. حساب ترتيب الربع الاول والذي يساوي

$$\text{ترتيب الربع الاول} = \frac{\sum f_i}{4}$$

3. تحديد فئة الربع الاول وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع

الصاعد اللاحق لترتيب الربع الاول (F_{k+1}).

4. اذا كان التوزيع التكراري متقطع فأن قيمة الربع الاول

تساوي مركز فئة الربع الاول.

5. اذا كان التوزيع التكراري مستمر فإن الربع الأول يساوي

$$Q_1 = h_k + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - F_{k-1}}{f_k} * L_k$$

حيث ان Q_1 : الربع الاول.
 h_k : الحد الادنى لفئة الربع الاول.

$\frac{\sum f_i}{4}$: ترتيب الربع الاول.

F_{k-1} : التكرار المتعجم الصاعد السابق لترتيب الربع الاول.

f_k : تكرار فئة الربع الاول.

L_k : طول فئة الربع الاول.

ب. حساب قيمة الربع الثالث ، باتباع نفس خطوات حساب
 الربع الأول مع ملاحظة أن ترتيب الربع الثالث يساوي

$$\frac{3 \sum f_i}{4} = \text{ترتيب الربع الثالث}$$

ج . وأخيراً فإن الانحراف الربعي يحسب وفق الصيغة

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

مثال (2): الآتي توزيع تكراري لعينة من الأسر قوامها (124) أسرة حسب عدد الأفراد ، والمطلوب حساب درجة التشتت بين عدد أفراد الأسرة باستخدام.

1. المدى. 2. الانحراف الربيعي.

<u>الفئات</u>	<u>f_i</u>	<u>F_i</u>	
2 – 4	4	4	
5 – 7	15	19	F_{k-1}
فئة الربع الأول	8 – 10	22	41
فئة الربع الثالث	11 – 13	36	77
	14 – 16	28	105
	17 – 19	14	119
	20 – 22	5	124
			<u>124</u>

1. المدى:

$$R = X_L - X_S$$

$$R = 22 - 2 = 20$$

2. الانحراف الربيعي:

$$\text{ترتيب الربع الاول} = \frac{\sum f_i}{4} = \frac{124}{4} = 31$$

نلاحظ بأن التوزيع التكراري متقطع فإن قيمة الربع الأول تساوي مركز فئة الربع الأول.

$$\therefore Q_1 = \frac{8 + 10}{2} = 9$$

$$\frac{3 \sum f_i}{4} = \text{ترتيب الربع الثالث}$$

نلاحظ بأن التوزيع التكراري متقطع فأن قيمة الربع الثالث تساوي مركز فئة الربع الثالث.

$$\therefore Q_3 = \frac{14 + 16}{2} = 15$$

$$\therefore Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{15 - 9}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

مثال (3): الآتي توزيع تكراري لأعمار تلاميذ احدى المدارس الابتدائية ، والمطلوب تقدير درجة التشتت بين اعمار هؤلاء التلاميذ باستخدام الانحراف الربعي.

	<u>الفئات</u>	<u>f_i</u>	<u>F_i</u>	
	أقل من 6	16	16	
فئة الربع الأول	6 – 7	120	136	$\leftarrow F_{k-1}$ ترتيب الربع الاول
	7 – 8	131	267	F_{k+1}
	8 – 9	145	412	
فئة الربع الثالث	9 – 10	122	534	$\leftarrow F_{k-1}$ ترتيب الربع الثالث
	10 – 11	115	649	F_{k+1}
	11 – 12	101	750	
	12 – 13	22	772	
			772	

الانحراف الربيعي:

نلاحظ بأن التوزيع التكراري مستمر فأن قيمة الربع الأول ، والربع الثالث تحسب وفقاً للآتي:

$$\text{ترتيب الربع الأول} = \frac{\sum f_i}{4} = \frac{772}{4} = 193$$

$$Q_1 = h_k + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - F_{k-1}}{f_k} * L_k$$

$$Q_1 = 7 + \frac{193 - 136}{131} * (1) \rightarrow \therefore Q_1 = 7.435$$

$$\text{ترتيب الربع الثالث} = \frac{3 \sum f_i}{4} = 3(193) = 579$$

$$Q_3 = h_k + \frac{\frac{3 \sum f_i}{4} - F_{k-1}}{f_k} * L_k$$

$$Q_3 = 10 + \frac{579 - 534}{115} * (1) \rightarrow \therefore Q_3 = 10.391$$

$$\therefore Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{10.391 - 7.435}{2} = \frac{2.956}{2} = 1.478$$

ملاحظات حول الانحراف الربيعي

يعتبر الانحراف الربيعي أفضل من المدى كونه يستخدم (50%) من البيانات المتاحة فقط ويهمل الباقي. أن هذا المقياس قليل الاستخدام في حين أنه يمتاز على بقية مقاييس التشتت المطلقة من حيث امكانية حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة في حين يتعدى الحصول على بقية مقاييس التشتت.

جـ. الانحراف المتوسط (Mean Deviation)

يعرف الانحراف المتوسط بأنه مجموع الانحرافات المطلقة لقيم المتغير العشوائي عن نقطة اختيارية مثل (A) مقسوماً على عدد هذه القيم وغالباً نختار النقطة (القيمة) (A) لأن تكون أحد مقاييس النزعة المركزية الثلاث (الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال) ، وسنتناول الانحراف المتوسط بالاعتماد على الوسط الحسابي.

1. حساب الانحراف المتوسط لبيانات غير مبوبة:

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n قيم متغير عشوائي والتي تمثل قياسات عينة قوامها (n) ، ولتكن (\bar{X}) الوسط الحسابي لتلك القياسات. فإن الانحراف المتوسط (M.D.) لتلك القياسات يحسب وفق الصيغة الآتية:

$$M.D. = \frac{\sum |X_i - A|}{n}$$

$$M.D. = \frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n} = \frac{|X_1 - \bar{X}| + |X_2 - \bar{X}| + \dots + |X_n - \bar{X}|}{n}$$

مثال (4): للبيانات التالية جد الانحراف المتوسط

X_i	2	3	4	5	5	6	7	10	13	14	19
-------	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----

X_i	$ X_i - \bar{X} $
2	6
3	5
4	4
5	3
5	3
6	2
7	1
10	2
13	5
14	6
19	11
88	48

1. نجد الوسط الحسابي

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\bar{X} = \frac{2 + 3 + \dots + 19}{11} = \frac{88}{11} = 8$$

2. نجد الانحراف المتوسط

$$M. D. = \frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n} = \frac{|X_1 - \bar{X}| + |X_2 - \bar{X}| + \dots + |X_n - \bar{X}|}{n}$$

$$M. D. = \frac{|2 - 8| + |3 - 8| + \dots + |19 - 8|}{11} = \frac{6 + 5 + \dots + 11}{11}$$

$$M. D. = \frac{48}{11} = 4.367$$

2. حساب الانحراف المتوسط لبيانات مبوبة (التوزيعات التكرارية):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_m مراكز الفئات لتوزيع تكراري عدد فئاته (m) وأن f_1, f_2, \dots, f_m التكرارات المقابلة لهذه الفئات. فأن الانحراف المتوسط (M.D.) لتلك البيانات يحسب وفق الصيغة الآتية:

$$M.D. = \frac{\sum |X_i - \bar{X}| * f_i}{\sum f_i}$$

$$M.D. = \frac{|X_1 - \bar{X}| * f_1 + |X_2 - \bar{X}| * f_2 + \dots + |X_m - \bar{X}| * f_m}{f_1 + f_2 + \dots + f_m}$$

حيث أن:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{X_1 * f_1 + X_2 * f_2 + \dots + X_m * f_m}{f_1 + f_2 + \dots + f_m}$$

مثال (5): الآتي توزيع تكراري لدرجات مجموعة من طلبة في امتحان معين. يطلب حساب درجة التشتت بين درجات هؤلاء الطلبة باستخدام الانحراف المتوسط

<u>الفئات</u>	<u>f_i</u>	<u>X_i</u>	<u>$f_i * X_i$</u>	<u>$X_i - \bar{X} * f_i$</u>
0 – 10	2	5	10	109
10 – 20	4	15	60	178
20 – 30	8	25	200	276
30 – 40	16	35	560	392
40 – 50	25	45	1125	362.5
50 – 60	60	55	3300	270
60 – 70	42	65	2730	231
70 – 80	35	75	2625	542.5
80 – 90	18	85	1530	459
90 – 100	10	95	950	355
	<hr/> 220	<hr/> 13090		<hr/> 3175

1. نجد الوسط الحسابي

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{X_1 * f_1 + X_2 * f_2 + \dots + X_m * f_m}{f_1 + f_2 + \dots + f_m}$$

$$\bar{X} = \frac{5 * 2 + 4 * 15 + \dots + 10 * 95}{2 + 4 + \dots + 10} = \frac{13090}{220} = 59.5$$

2. نجد الانحراف المتوسط

$$M. D. = \frac{\sum |X_i - \bar{X}| * f_i}{\sum f_i}$$

$$M. D. = \frac{|X_1 - \bar{X}| * f_1 + |X_2 - \bar{X}| * f_2 + \dots + |X_m - \bar{X}| * f_m}{f_1 + f_2 + \dots + f_m}$$

$$M. D. = \frac{|5 - 59.5| * 2 + |15 - 59.5| * 4 + \dots + |95 - 59.5| * 10}{2 + 4 + \dots + 10}$$

$$M. D. = \frac{3175}{220} = 14.432 \quad \text{درجة}$$

مزایا الانحراف المتوسط:

1. أن حسابه يعتمد على كافة البيانات المتاحة.
2. أنه مقياس سهل الفهم والحساب.
3. خصوّعه للعمليات الجبرية.
4. أن قيمته تكون أقل ما يمكن عندما يحسب باستخدام الوسيط.

عيوب الانحراف المتوسط:

- I. اهمال الاشارات السالبة للفروق عند عملية حسابه.
- II. لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.
- III. لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية.
- IV. تتأثر قيمته في حالة وجود قيم شاذة أو متطرفة.
- V. يتأثر وعلى نحو كبير بأخطاء المعاينة.

د. الانحراف المعياري (Standard Deviation):

يعتبر هذا المقياس أفضل مقاييس التشتت المطلقة ، ويعرف بأنه الجذر التربيعي الموجب للتباین ، والتباین (Variance) عبارة عن متوسط مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير العشوائي عن وسطها الحسابي.

1. حساب الانحراف المعياري لبيانات غير مبوبة:

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n قيم متغير عشوائي والتي تمثل قياسات عينة قوامها (n) ، ولتكن (\bar{X}) الوسط الحسابي لتلك القياسات. فإن الانحراف المعياري (S) لتلك القياسات يحسب وفق الصيغة الآتية:

$$S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}}$$

أما التباین لهذه القياسات فيساوي

$$S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}$$

هذا يعني أن:

$$S = \sqrt{S^2}$$

أن الصيغة السابقة لحساب الانحراف المعياري أو التباین قد تكون مطولة ، ولغرض تسهيل العمليات الحسابية يمكن اتباع احدى الصيغتين الآتیتين بالاعتماد على الاشتقاء الآتي:

من خلال النظر للصيغة $\sum(X_i - \bar{X})^2$: مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي في حل الأمثلة تكون مطولة لذا يتم اختصارها وكما يلي:

$$\sum(X_i - \bar{X})^2 = \sum(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum X_i^2 - 2\bar{X}\sum X_i + n\bar{X}^2$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} \rightarrow \sum X_i = n\bar{X}$$

$$\sum(X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n}} \quad \dots (3)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum X_i}{n}\right)^2} \quad \dots (4)$$

أي أن التباين

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n} \quad \dots (5)$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum X_i}{n}\right)^2 \quad \dots (6)$$

ملاحظات:

1. تستخدم الصيغة رقم (3) اذا توفرت قيمة الوسط الحسابي.
2. تستخدم الصيغة رقم (4) اذا لم تتوفر قيمة الوسط الحسابي.
3. يمكن حساب التباين اولاً ثم اخذ الجذر التربيعي له لنحصل على قيمة الانحراف المعياري.

مثال (6): البيانات التالية تمثل أوزان عينة من الطلبة قوامها عشرة طلاب. قدر درجة التشتت بين أوزانهم باستخدام الانحراف المعياري.

X_i	X_i^2
56	3136
62	3844
69	4761
71	5041
68	4624
65	4225
63	3969
72	5184
68	4624
56	3136
650	42544

$$S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{42544}{10} - \left(\frac{650}{10}\right)^2} = \sqrt{4254.4 - 4225}$$

$$S = \sqrt{29.4} = 5.422$$

ملاحظة : إذا أريد حساب التباين فإن التباين هو:

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 = \frac{42544}{10} - \left(\frac{650}{10}\right)^2 = 4254.4 - 4225 = 29.4$$

ملاحظة : في المثال رقم (6) ، استخدمت الصيغة رقم (4) ، والصيغة رقم (5) لحساب الانحراف المعياري والتباين لعدم وجود الوسط الحسابي.

مثال (7): أحسب الانحراف المعياري والتباين للبيانات الواردة في المثال رقم (4). علماً أن الوسط الحسابي هو $\bar{X} = 8$

X_i	X_i^2
2	4
3	9
4	16
5	25
5	25
6	36
7	49
10	100
13	169
14	196
19	361
88	990

$$S = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n}} = \sqrt{\frac{990 - (11)(8)^2}{11}} = \sqrt{\frac{990 - 704}{11}}$$

$$S = \sqrt{\frac{286}{11}} = \sqrt{26} = 5.099$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n} = \frac{990 - (11)(8)^2}{11} = \frac{990 - 704}{11} = \frac{286}{11}$$

$$S^2 = 26$$

2. حساب الانحراف المعياري للبيانات المبوبة (التوزيعات التكرارية):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_m مراكز الفئات لتوزيع تكراري عدد فئاته (m) وأن f_1, f_2, \dots, f_m التكرارات المقابلة لهذه الفئات. فأن الانحراف المعياري (S) لهذه البيانات يحسب وفق الصيغة الآتية:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 * f_i}{\sum f_i}} \quad \dots (1)$$

$$S = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 * f_1 + (X_2 - \bar{X})^2 * f_2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 * f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}}$$

أما التباين لهذه القياسات فيساوي

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 * f_i}{\sum f_i} \quad \dots (2)$$

$$S^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 * f_1 + (X_2 - \bar{X})^2 * f_2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 * f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

هذا يعني أن:

$$S = \sqrt{S^2}$$

وكمما أوردنا في البيانات الغير مبوبة أن الصيغتين (1) ، و (2) السابقة لحساب الانحراف المعياري أو التباين تكون مطولة ، ولغرض تسهيل العمليات الحسابية يمكن اتباع احدى الصيغتين الآتيتين بالاعتماد على الاشتقال الآتي:

من خلال النظر للصيغة $\sum (X_i - \bar{X})^2 * f_i$ في حل الأمثلة تكون مطولة لذا يتم اختصارها وكما يلي:

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 * f_i = \sum (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) * f_i = \sum X_i^2 * f_i - 2\bar{X} \sum X_i * f_i + \bar{X}^2 \sum f_i$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i * f_i}{\sum f_i} \rightarrow \sum X_i * f_i = (\sum f_i) * \bar{X}$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 * f_i = \sum X_i^2 * f_i - (\sum f_i) \bar{X}^2$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 * f_i - (\sum f_i) \bar{X}^2}{\sum f_i}} \quad \dots (3)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 * f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum X_i * f_i}{\sum f_i} \right)^2} \quad \dots (4)$$

أي أن التباين

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 * f_i - (\sum f_i) \bar{X}^2}{\sum f_i} \quad \dots (5)$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 * f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum X_i * f_i}{\sum f_i} \right)^2 \quad \dots (6)$$

ملاحظات:

1. تستخدم الصيغة رقم (3) اذا توفرت قيمة الوسط الحسابي.
2. تستخدم الصيغة رقم (4) اذا لم تتوفر قيمة الوسط الحسابي.
3. يمكن حساب التباين اولاً ثم اخذ الجذر التربيعي له لنحصل على قيمة الانحراف المعياري.

مثال (8): الآتي توزيع تكراري لدرجات مجموعة من طلبة في امتحان معين. يطلب حساب درجة التشتت بين درجات هؤلاء الطلبة باستخدام الانحراف المعياري ثم حساب التباين.

<u>الفئات</u>	<u>f_i</u>	<u>X_i</u>	<u>$f_i * X_i$</u>	<u>$X_i^2 * f_i$</u>
0 – 10	2	5	10	50
10 – 20	4	15	60	900
20 – 30	8	25	200	5000
30 – 40	16	35	560	19600
40 – 50	25	45	1125	50625
50 – 60	60	55	3300	181500
60 – 70	42	65	2730	177450
70 – 80	35	75	2625	196875
80 – 90	18	85	1530	130050
90 – 100	10	95	950	90250
	220		13090	852300

$$S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 * f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} \right)^2} = \sqrt{\frac{852300}{220} - \left(\frac{13090}{220} \right)^2}$$

$$S = \sqrt{3874.091 - 3540.25} = \sqrt{333.841} = 18.271$$

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2 * f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} \right)^2$$

$$S^2 = \frac{852300}{220} - \left(\frac{13090}{220} \right)^2 = 3874.091 - 3540.25 = 333.841$$

مثال (9): الآتي توزيع تكراري لرواتب مجموعة من الموظفين على فئات الراتب الأسمى للموظفين. أحسب الانحراف المعياري لقياس درجة التشتت بين رواتب هؤلاء الموظفين إذا علمت

$$\bar{X} = 90.917$$

<u>الفئات</u>	<u>f_i</u>	<u>\bar{x}_i</u>	<u>$\bar{x}_i^2 * f_i$</u>
69.5 – 72.5	6	71	30246
72.5 – 76.5	10	74.5	55502.5
76.5 – 88.5	18	82.5	122512.5
88.5 – 97.5	25	93	216225
97.5 – 112.5	12	105	132300
112.5 – 130.5	7	121.5	103335.75
	<u>78</u>		<u>660121.75</u>

$$S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 * f_i - (\sum f_i) \bar{X}^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{660121.75 - (78) * (90.917)^2}{78}}$$

$$S = \sqrt{\frac{660121.75 - 644740.27}{78}} = \sqrt{\frac{15381.48}{78}} = \sqrt{197.199} = 14.043$$

أي أن التباين يساوي

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2 * f_i - (\sum f_i) \bar{X}^2}{\sum f_i} = \frac{660121.75 - (78) * (90.917)^2}{78}$$

$$S^2 = \frac{660121.75 - 644740.27}{78} = \frac{15381.48}{78} = 197.199$$

مزایا و عیوب الانحراف المعياري

أ. مميزات الانحراف المعياري:

(1) حسابه يعتمد على كافة البيانات.

(2) أنه مقياس سهل الفهم والحساب.

(3) خصوّعه للعمليات الجبرية.

(4) قابليته للتجزئة والاندماج.

ب. عيوب الانحراف المعياري:

- 1) لا يمكن حسابه للتوزيعات التكرارية المفتوحة.
- 2) لا يمكن حسابه للمتغيرات الوصفية.
- 3) تتأثر قيمته في حالة وجود قيم شاذة أو متطرفة.
- 4) يتأثر وعلى نحو كبير بأخطاء المعاينة.

ملحوظة (مهمة) : أن مزايا و عيوب التباين هي نفسها مزايا و عيوب الانحراف المعياري.

خصائص الانحراف المعياري

أ. أن قيمة (S) الانحراف المعياري دائماً موجبة أي ان $S \geq 0$

وتكون قيمة الانحراف المعياري تساوي صفرأً إذا كانت قيمة مفردات العينة متساوية. أي أن العينة ذات قيم ثابتة.

ب. إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n تمثل قيم المتغير العشوائي X_i والذي يمثل قياسات العينة وأن (a) ثابت (Constant)، وأن Y_i هو متغير عشوائي حيث أن:

$$Y_i = a * X_i$$

فأن الانحراف المعياري للمتغير العشوائي Y_i يعطى وفق الصيغة الآتية:

$$S_Y = |a| * S_X$$

ج. إذا كانت (a) كمية ثابتة وأن $Y_i = X_i \pm a$ فإن :

$$S_Y = S_X$$

معنى إذا أضيفت أو طرحت قيمة ثابتة لقيم العينة فأن الانحراف المعياري قيمته لا تتغير.

مثال (10): إذا كانت لدينا عينة بحجم (5) مفردات لها القياسات الآتية (6,1,4,2,5) ، وبافتراض أن ($a=-3$) فأثبت حسابياً أن:

$$1) S_Y = |a| * S_X$$

إذا علمت أن

$$Y_i = a * X_i$$

$$2) S_Y = S_X$$

إذا علمت أن

$$Y_i = X_i \pm a$$

الحل: أولاً

X_i	X_i^2	$Y_i = a * X_i$	Y_i^2	$Y_i = X_i + a$	Y_i^2
6	36	$-3 * 6 = -18$	324	$6 + (-3) = 3$	9
1	1	$-3 * 1 = -3$	9	$1 + (-3) = -2$	4
4	16	$-3 * 4 = -12$	144	$4 + (-3) = 1$	1
2	4	$-3 * 2 = -6$	36	$2 + (-3) = -1$	1
5	25	$-3 * 5 = -15$	225	$5 + (-3) = 2$	4
18	82	-54	738	3	19

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{82}{5} - \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \sqrt{16.4 - 12.96} = \sqrt{3.44} = 1.855$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum y_i}{n}\right)^2}$$

في الخاصية الأولى :

$$S_y = \sqrt{\frac{738}{5} - \left(\frac{-54}{5}\right)^2} = \sqrt{147.6 - 116.64} = \sqrt{30.96} = 5.564$$

$$|a| * S_x = |-3| * 1.855 = 5.565 = S_y = 5.564$$

في الخاصية الثانية:

$$S_y = \sqrt{\frac{19}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{3.8 - 0.36} = \sqrt{3.44} = 1.855$$

$$S_Y = S_X$$

تمرين: أستخدم بيانات المثال رقم (10) لإثبات أن

$$S_Y = |a| * S_X$$

إذا علمت أن

$$Y_i = X_i \pm a$$

خصائص التباين

أ. أن قيمة (S^2) التباين دائماً موجبة أي ان

$$S^2 \geq 0$$

وتكون قيمة التباين تساوي صفرًا إذا كانت قيمة مفردات العينة متساوية. أي أن العينة ذات قيم ثابتة.

ب. إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n تمثل قيم المتغير العشوائي X_i والذي يمثل قياسات العينة وأن (a) ثابت (Constant)، وأن Y_i هو متغير عشوائي حيث أن:

$$Y_i = a * X_i$$

فأن التباين للمتغير العشوائي Y_i يعطى وفق الصيغة الآتية:

$$S^2_Y = a^2 * S^2_X$$

ج. إذا كانت (a) كمية ثابتة وأن $Y_i = X_i \pm a$ فأن :

$$S^2_Y = S^2_X$$

د. إذا كانت (a) كمية ثابتة وأن $Y_i = aX_i \pm b$ فأن :

$$S^2_Y = a^2 * S^2_X$$

مثال (11): تمرين: أستخدم بيانات المثال رقم (10) لإثبات الخواص (ب) ، و (ج) ، و (د) .

هـ . لتكن $S_1^2, S_2^2, \dots, S_k^2$ تمثل التباينات المحسوبة لسلسلة من العينات المتعاقبة عن المتغير X التي قوام كل منها وعلى التابع n_1, n_2, \dots, n_k عندئذ التباين الكلي لحاصل دمج قياسات هذه العينات معاً والذي غالباً ما يصطلاح عليه بمحصلة التباين (Pooled Variance) هو

$$S^2_X = \frac{\sum n_j * S^2_j}{\sum n_j} , \text{ Where } j = 1, 2, \dots, k$$

مع ملاحظة أنه إذا كان عدد مفردات كافة هذه العينات متساوي أي أن $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ ، عندئذ فإن محصلة التباين S^2_X تساوي الوسط الحسابي لتباينات هذه العينات أي أن:

$$S^2_X = \frac{\sum S^2_j}{k} , \text{ Where } j = 1, 2, \dots, k$$

مثال (12): إذا علمت أن تباين أعمار طلبة الصف الأول إحصاء الشعبة (أ) عددهم (52) يساوي (2.5) ، وأن تباين أعمار طلبة الشعبة (ب) البالغ عددهم (63) يساوي (2.1). جد تباين أعمار الطلبة في هذه المرحلة.

$$S^2_X = \frac{\sum n_j * S^2_j}{\sum n_j}$$

$$S^2 = \frac{n_1 * S^2_1 + n_2 * S^2_2}{n_1 + n_2} = \frac{(52)(2.5) + (63)(2.1)}{52 + 63} = \frac{262.3}{115} = 2.281$$

مثال (13): إذا علمت أن تباين أعمار طلبة الصف الأول إحصاء الشعبة (أ) عددهم (50) يساوي (2.5) ، وأن تباين أعمار طلبة الشعبة (ب) البالغ عددهم (50) أيضاً يساوي (2.1). جد تباين أعمار الطلبة في هذه المرحلة.

$$S^2_x = \frac{\sum S^2_j}{k}$$

$$S^2 = \frac{S^2_1 + S^2_2}{2} = \frac{(2.5) + (2.1)}{2} = \frac{4.6}{2} = 2.3$$

تمارين عن مقاييس التشتت المطلقة:

1. لمجموع البيانات التالية جد كافة مقاييس التشتت المطلقة.

.I

X_i	2	1	3	4	6	7	6	5	9	10	2	3	1	4	6	2	3	8	11
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	----

.II

X_i	-1	-3	-2.5	-4	0	1.5	-2	-4.5	-6	-5
-------	----	----	------	----	---	-----	----	------	----	----

.III

X_i , Where $i = 1, 2, \dots, 20$

2. الآتي توزيع تكراري للأعمار عينة من الأفراد قوامها 542 فرد. جد:

1. الانحراف المتوسط. 2. الانحراف المعياري. 3. التباين.

<u>الفئات</u>	<u>f_i</u>
20 –	3
30 –	61
40 –	132
50 –	153
60 –	140
70 –	51
80 – 90	2

3. الآتي توزيع تكراري لأوزان مجموعة من الأطفال. يطلب إيجاد مقاييس التشتت الملائم.

<u>الفئات</u>	<u>f_i</u>
أقل من 4	10
4 –	25
6 –	36
8 –	32
10 فأكثر	17

4. شركة للغزل والنسيج مؤلفة من ثلاثة مصانع. فإذا علمت أن متوسط الأجر الشهري والانحراف المعياري للأجر في كل مصنع كان على النحو الآتي :

متوسط الأجر \bar{X}_j	الانحراف المعياري S^2_j	عدد العاملين (n_j)	تسلسل المصنع
107	4.62	122	1
103	5.53	157	2
111	6.32	198	3

جد متوسط الأجر والتباين للأجر في هذه الشركة.

5. جد قيمة (Z) التي تجعل التباين لقيم المجموعة التالية يساوي (4).

X _i	2	5	4	3	8	7	Z
----------------	---	---	---	---	---	---	---

6. للبيانات الواردة في التمرين رقم (4) ، جد تباين الأجر للشركة بافتراض أن عدد العاملين متساوي في كل مصنع.