Ch-4

- chebyshev's inequality
- weak low of large numbers
- Kolmogrove strong low of larage number.
- The Centeral limit theorem.
- Nartingal theory.

ch-4 12.20

1. chebyshev's inequality

The chebyshev's inequality is a useful theoretical tool. as well as it helps us to find upper and lower bounds for certain prob. when only the mean and variance of prob. dist. are known.

<u>Def. 1</u> if x is a r.v. with a finite mean μ and variance σ^2 then for any $K > 0$, we have,

$$\{|x-\mu| \geq K\} \leq \frac{\sigma^2}{}$$

<u>Def. 1</u> if x is a r.v. with a finite mean μ and variance σ^2 then for any $k > 0$, we have,

$$p\{|x-\mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

or $$p\{|x-\mu| < k\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

and when $\sigma^2 = 1$ we have

$$p\{|x-\mu| \geq k\} \leq \frac{1}{k^2}$$

or $$p\{|x-\mu| < k\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

(P. 172 - 173)

proof $P\left[|X-m| \geq k\right] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$

let X be a continuous r.v. with density fun. f. then

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X-E(X))^2$$
$$= E(X-m)^2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{m-k} (x-m)^2 f(x)\,dx + \int_{m-k}^{m+k} (x-m)^2 f(x)\,dx + \int_{m+k}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$$
$$\geq \int_{-\infty}^{m-k} \underset{k}{(x-m)^2} f(x)\,dx + \int_{m+k}^{\infty} \underset{k}{(x-m)^2} f(x)\,dx$$

for the first integral $\quad x \leq m-k \longrightarrow \underline{x-m} \leq -k$

and secon integral $\quad x \geq m+k \longrightarrow \underline{x-m} \geq k$

for the first integral $\quad x \leq m-k \rightarrow \underline{x-m} \leq -k$

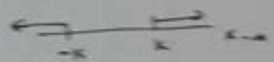
and secon integral $\quad x \geq m+k \rightarrow \underline{x-m} \geq k$

then

$$\sigma^2 \geq k^2 \int_{-\infty}^{m-k} f(x)\,dx + k^2 \int_{m+k}^{\infty} f(x)\,dx.$$

$$= k^2\, p(x \leq m-k) + k^2\, p(x \geq m+k)$$

$$= k^2\, p(x-m \leq -k) + k^2\, p(x-m \geq k)$$



$$\sigma^2 = k^2\, p[\,|x-m| \geq k\,]$$

There fore

$$p\{\,|x-m| \geq k\,] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

H.w. proof for the discrete case
just adapted by changing
the integration sign by. summation

تمرين
P171 − 172

Remark.

(1) The chebyshev's inequality can be obtained if we let $g(x) = (X-m)^2$ and $a = K^2$ in equation.

$$p\{g(x) \geq a\} \leq \frac{E(g(x))}{a}$$

then

$$p\{(X-m)^2 \geq \epsilon^2\} \leq \frac{E(X-m)^2}{K^2} = \frac{\overset{V(X)}{\sigma^2}}{K^2}$$

(2) The chebyshev's inequality can also be written as

$$p\{|X-m| \geq a\sigma\} \leq \frac{1}{a^2}$$

(3) since $p\{|X-m| \geq K\} + p\{|X-m| < K\} = 1$

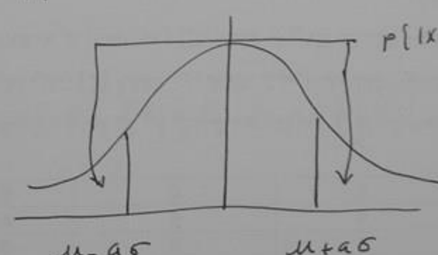
then by applying equation

$$p\{|X-m| \geq K\} \leq \frac{\sigma^2}{K^2}$$

we get equation

$$p\{|X-m| < K\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{K^2}.$$

$p\{|X-m| \geq a\sigma\} \leq \frac{1}{a^2}$



chebyshev inequality

let x be a r.v. and g(x) is a non negative fun. with domain the real line. if $E\{g(x)\}$ exists then for any Constant K we have

$$P\{g(x) \geq K\} \leq \frac{E\{g(x)\}}{K}$$

proof assume. x is a continuous r.v. with p.d.f. f(x) then,

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx.$$

$$= \int_{\{x;\, g(x) \geq k\}} g(x)\, f(x)\, dx + \int_{\{x;\, g(x) < k\}} g(x)\, f(x)\, dx.$$

$$\geq \int_{\{x;\, g(x) \geq k\}} g(x)\, f(x)\, dx \geq k \int_{\{x;\, g(x) \geq k\}} f(x)\, dx = K\, P\{g(x) \geq k\}$$

$$\therefore P\{g(x) \geq k\} \leq \frac{E\{g(x)\}}{k}.$$

e2/A

Theorem

Chebyshev's inequality

let x be a r.v. such that $E(u(x))$ exists. where $u(x)$ is nonnegative function of x. let $c > 0$ be a constant. then.

$$P\{u(x) \geq c\} \leq \frac{E[u(x)]}{c}$$

proof for continuous case.

$$E(u(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x)\,dx$$

$$= \int_A u(x) f(x)\,dx + \int_{A^c} u(x) f(x)\,dx.$$

f(x)

where $A = \{x ; u(x) \geq c\}$

and $A^c = \{x ; u(x) < c\}$

since. $u(x) \geq 0$ and also $f(x) \geq 0$

then. $\int_{A^c} u(x) f(x)\,dx > 0 \quad \ldots\ (a)$

but we have

$$E(u(x)) = \int_A u(x) f(x)\,dx + \int_{A^c} u(x) f(x)\,dx.$$

$$E(u(x)) - \int_A u(x) f(x)\,dx = \int_{A^c} u(x) f(x)\,dx.$$

نعوض في (a) ينتج

$$E(u(x)) - \int_A u(x) f(x)\,dx > 0$$

$$E(u(x)) > \int_A u(x) f(x)\,dx \quad \ldots\ (b)$$

since for $x \in A$ we have $u(x) \geq c$, then

$u(x) \geq c \rightarrow E\,u(x) \geq E\,c$

$$\int_A u(x) f(x)\,dx \geq \int_A c\, f(x)\,dx$$

$u(x) \geq$
$E(u(x))$

$$\int_A u(x) f(x)\,dx \geq c \underbrace{\int_A f(x)\,dx}.$$

$$\int_A u(x) f(x)\,dx \geq c \; P\{u(x) \geq c\}$$

substitating in (b) we have

$$E[u(x)] \geq c \; P\{u(x) \geq c\}$$

بالقسمة على c ينتج لنا .

$$\frac{E(u(x))}{c} \geq P\{u(x) \geq c\}$$

$$\therefore \boxed{P\{u(x) \geq c\} \leq \frac{E(u(x))}{c}}$$

Ch-4

عدم المساواة:

chebyshev's Inequality :- متباينة تشيبيشف

(a) if x is non-negative r.v. , $0<p<\infty$ and $0<\epsilon<\infty$

then

$$\boxed{pr\left[x \geq \epsilon\right] \leq \frac{E\,x^p}{\epsilon^p}}$$

(b) if x is a r.v. with finit mean m and variance σ^2

and $0<k<\infty$ then

$$pr\left[|x-m| \geq k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

i.e a r.v. with small variance is likely chose to its mean.

chebysheve inequality

متباينة (متراجحة) تشيبيشف

finit mean

non-negative

$$Pr(|x-m| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P_r(x \geq \epsilon) \leq \frac{Ex^p}{\epsilon^p}$$

كلما قل التباين تركز البيانات حول المتوسط

__Corollary__ Chebyshev inequality

let X be r.v. having mean μ and variance σ^2, if $k > 0$ then

$$P\{|X-\mu_x| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

~~inequality~~ or equivalently

$$P\{|X-\mu| < k\sigma\} \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

__proof__ in theorem 7.

let $\cancel{u}(x) = (x-\mu_x)^2$

and $c = k^2\sigma^2$

then

but $\sigma^2 = E(X-\mu_x)^2$

$$P\{(X-\mu_x)^2 \geq k^2\sigma^2\} \leq \frac{E(X-\mu_x)^2}{k^2\sigma^2}$$

$$P\{(X-\mu_x)^2 \geq k^2\sigma^2\} \leq \frac{\cancel{\sigma^2}}{k^2\cancel{\sigma^2}}$$

$$P\{(X-\mu_x)^2 \geq k^2\sigma^2\} \leq \frac{1}{k^2}$$

Chebyshev - inequality (corrollary)

if x is a r.v. with finite variance.

then

$$P\{|x-\mu| \geq r\sigma_x\} = P\{(x-\mu_x)^2 \geq r^2\sigma_x^2\} \leq \frac{1}{r^2}$$

for every value of $r > 0$

proof

take $g(x)$ to be $(x-\mu_x)^2$ and $k = r^2\sigma^2$

applying the chebyshev inequality.

يعني الكلام دي
لعلاقة تشيبي شيف.
lower bound for cheb

also

$$P\{|x-\mu_x| \leq r\sigma_x\} \geq 1 - \frac{1}{r^2}$$

فكليس P. 169 Q2 B

Markov's inequality.

if X is a r. v. that takes only nonnegative values then for any constant $a>0$ we have

$$p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

proof we shall prove this inequallity for continuous case let the density of x be f. then we have

$$E(x) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^a x f(x) dx + \int_a^\infty x f(x) dx.$$

$$\geq \int_a^\infty x f(x) dx$$

$$\text{Because } \int_0^\infty x f(x) dx \geq 0.$$

$$\geq a \int_a^\infty f(x) dx.$$

$$= a\, p(X \geq a)$$

Hence.

$$p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

A generalization of form of Markov's inequality is: if $g(x)$ is a non negative fun. of a r.v. X. then for every $a>0$ we have.

$$p\{ g(x) \geq a \} \leq \frac{E[g(x)]}{a}$$

proof see Gupta. and kapoor. (1983)

Corrollary ( )

Markov-inequality

let x be a r.v. having mean μ if $c>0$, and $r>0$
then

$$P\{|x-\mu| \geq c\} \leq \frac{E[|x-\mu|^r]}{c^r}$$

proof. in theorem ( )

take $u(x) = |x-\mu_x|^r$

$$P\{|x-\mu_x|^r \geq c^r\} \leq \frac{E|x-\mu_x|}{c^r}$$

$$\Rightarrow P\{|x-\mu_x| \geq c\} \leq E\frac{|x-\mu_x|^r}{c^r}$$

1.35 P. 172 – 173

3- Jensen's inequality

let X be a r.v. with finit mean $E(X)$ and let f be a convex fun. then.

$$E[f(X)] \geq f[E(X)]$$

befor we give the proof of Jensen's inequality we define the convex fun.

Convex fun. is: let f be a real-valued fun. defined on an interval I ($I \subset R$). f is said to be convex if for every pair of point x_1 and x_2 of I we have

Convex fun.ns: let f be a real valued fun. defined on an interval I ($I \subset \mathbb{R}$). f is said to be convex if for every pair of point x_1 and x_2 of I, we have

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)$$

proof

Consider a tangent line to the fun. f at the point $(x_0, f(x_0))$

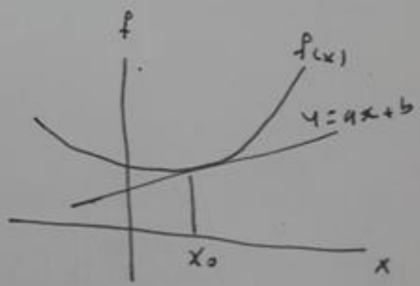
let the equation of the tangent be $y = ax + b$

since f is convex then

$$f(x) \geq ax + b$$

for all x hence

$$f(x_0) \geq a x_0 + b$$



متراجحة چيبيشيف : Chebyshev's inequality

لا يمكن بصورة عامة تحديد قانون الاحتمال عند معرفة متوسط وتباين قانون الاحتمال في الحالات التي تكون عندها شكل دالة قانون الاحتمال معروفة لعدد غير محدد من المعالم (مثلاً يمكن افتراض ان قانون الاحتمال لتوزيع طبيعي بمعلمتين (σ^2, m). فانه يمكن إيجاد علاقة بين المعالم والمتوسط والتباين. بعد ذلك يمكن استعمال معرفة المتوسط والتباين لتحديد قانون الاحتمال.

اما في حالة كون شكل الدالة غير معروفة ((اي دالة القانون الاحتمالي)) يمكننا ايجاد تقدير بسيط لقانون الاحتمال حيث يمكن الاستفادة منه لعدة اغراض من معرفة المتوسط والتباين لاي قانون احتمال ذو المتوسط محدود m وتباين محدود σ^2

نعرف الكمية $Q(h)$ لاي $h>0$
بانها احتمال مخصص للفاصلة

$$\{x : m-h\sigma \leq x \leq m+h\sigma\}$$

بواسطة قانون الاحتمال . بدلالة دالة التوزيع $F(x)$ او دالة الكثافة الاحتمالية $f(\cdot)$ فان $Q(h)$ ستكون كالآتي .

$$Q(h) = F(m+h\sigma) - F(m-h\sigma)$$

$$= \int_{m-h\sigma}^{m+h\sigma} f(x)\,dx$$

الان . دعنا نحسب $Q(h)$ في حالات معينة.

١- في حالة قانون الاحتمال الطبيعي (m , σ)

2- في حالة القانون الاسي ذي المتوسط $\frac{1}{\lambda}$.

3- في حالة التوزيع المنتظم ضمن الفترة (a,b) عندما $h<\sqrt{3}$.

1- في حالة قانون الانتشار الطبيعي ذو المتوسط m والانحراف المعياري σ

$$Q(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{m-h\sigma}^{m+h\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2} dy$$

$$= \phi(h) - \phi(-h)$$

2- في حالة القانون الاسي ذو المتوسط $\frac{1}{\lambda}$ فإن:

$$Q(h) = \begin{cases} e^{-1}\left(e^{h} - e^{-h}\right) & \text{for } h \leq 1 \\ 1 - e^{-(1+h)} & \text{for } h \geq 1 \end{cases}$$

3. التوزيع المنتظم في الفاصلة a إلى b عندما $h < \sqrt{3}$ فإن:

$$Q(h) = \frac{1}{b-a} \int_{m-h\sigma}^{m+h\sigma} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_{\frac{b+a}{2} - h\left(\frac{b-a}{\sqrt{12}}\right)}^{\frac{b+a}{2} + h\left(\frac{b-a}{\sqrt{12}}\right)} dx = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

حيث where $\mu = m = \frac{a+b}{2}$

$v(x)$ $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

لا يمكن تقييم $Q(h)$ لقوانين الاحتمال كثيرة الحدود ومع ذلك الدالة $Q(h)$ لا تزال مهمة لأنه من الممكن الحصول على حدود دنيا حقيقية لها لا تعتمد على قانون الاحتمال. هذه الحدود الدنيا الحقيقية تسمى متراجحة جيبيجيف نسبة للعالم الروسي P.L. Chebyshev (1894-1821)

ان متراجحة جيبيجيف لاي دالة توزيع $F(x)$ ولاي $h \geq 0$ هي

$$Q(h) = F(m+h\sigma) - F(m-h\sigma) \geq 1 - \frac{1}{h^2} \quad \ldots(a)$$

لاحظ بان هذه المعادلة صحيحة بديهياً عندما $(h<1)$ لان الجهة اليمنى سالبة

برهان المعادلة (a) في حالة قانون الاحتمال المستمر بدالة كثافة احتمال (.

how that the chebyshev's inequality for any dist. func. $f(.)$ where $h \geq 0$. then

$$Q(h) = F(m + h\sigma) - F(m - h\sigma) \geq 1 - \frac{1}{h^2}$$

البرهان: سوف نبرهن أن دالة المتغير (X) كثافة احتمالية $f(.)$

$$\int_{m-h\sigma}^{m+h\sigma} f(x)\,dx \geq 1 - \frac{1}{h^2}$$

for prove this inequality we have to get first

[illegible]

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{m-h\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx + \int_{m+h\sigma}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx \quad \dots (1)$$

لأن التباين σ^2 يساوي مجموع تكاملين في الجهة اليمنى من المتراجحة (1) مضافاً اليه كمية غير سالبة

$$\int_{m-h\sigma}^{m+h\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx$$

لأن عندما تكون $x \leq m-h\sigma$

فإن $(x-m)^2 \geq h^2\sigma^2$

وبنفس الطريقة عندما

$x \geq m+h\sigma$

فإن $(x-m)^2 \geq h^2\sigma^2$

لأن هنا استبدلنا $(x-m)^2$

بالحد الأدنى [illegible] في المدى (a) [illegible]

ونحصل على:

$$\sigma^2 \geq \sigma^2 h^2 \left[\int_{-\infty}^{m-h\sigma} f(x)\,dx + \int_{m+h\sigma}^{\infty} f(x)\,dx \right] \quad \dots (b)$$

ان مجموع التكاملين في (b) يساوي $\boxed{1-Q(h)}$.

وبالتالي:

$$\sigma^2 \geq \sigma^2 h^2 (1 - Q(h))$$

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2 h^2} \geq (1 - Q(h))$$

$$\boxed{1 - Q(h) \leq \frac{1}{h^2}}$$

و.هـ.م.

ويمكن أن نعيد صياغة متراجحة جيبيشيف كالآتي.

$$P\{|x-m| \leq h\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{h^2}$$

$$P\{|x-m| > h\sigma\} \leq \frac{1}{h^2}$$

نحصل متراجحة بيينيمي (عندما $h=4$) :
على ان القيمة المشاهدة x تقع ضمن اربع انحرافات
قياسية عن المتوسط باحتمال على الاقل 0.9375
بينما باحتمال على الاقل 0.99 ستقع القيمة المشاهدة x
ضمن عشرة انحرافات قياسية عن المتوسط μ.
وهكذا بدلالة الانحراف القياسي (وعلى ذلك بدلالة
التباين σ^2) نستطيع التعبير عن الفترات التي نتوقع
ان تقع القيمة المشاهدة للظاهرة العشوائية ذات
القيم العددية ضمنها باحتمال عال جدا.

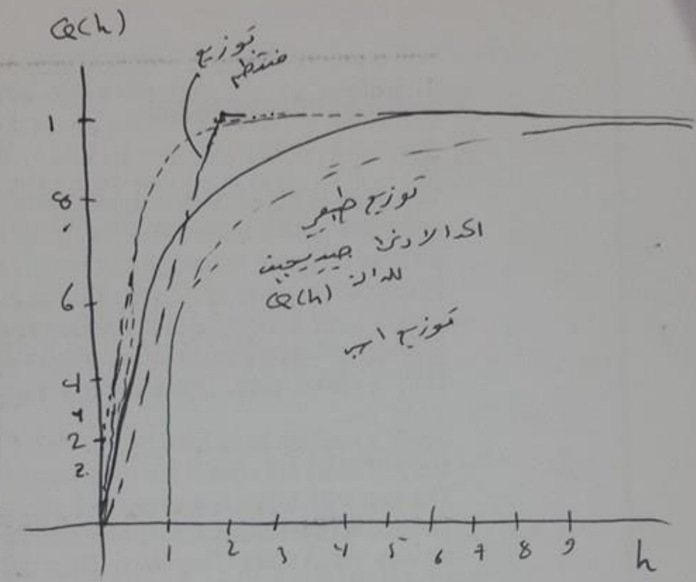
يمكن ان نلاحظ بان هذه الكمية هي التي تجعل التباين
مقياسا للانتشار او التشتت لكتلة الاحتمال التي
يتوزع قانون الاحتمال ضمن الخط الحقيقي.

نظرة اخرى لمتراجحة جيبيجيف:

يمكن جعل متراجحة جيبجيف اداة عملية لاستعمال رتب العزوم الدنيا لقانون الاحتمال للحصول على متراجحات لذلك التوزيع واستقصاءات ايضاحية لمختلف مسائل متراجحة جيبيجيف نجدها معطاة من قبل

H.J. Godwin متراجحة Tchebyshef

مجلة الاحصاءات الامريكية المشتركة الجزء ٥٠ سنة 1955 ص 923 الى ص 945 . ومن قبل C.L. Mallows وتوضيحات لمتراجحة Tchebysheff مجلة الجمعية الملكية الاحصائية . سلسلة B الجزء 18 سنة (1956) ص 139 الى ص 176 ((مع إضافة)).



الشكل يبين الدالة Q(h)

يمثل هذا الشكل المخطط للدالة Q(h) المعطاة لصيغة التوزيع الطبيعي ثم الاسي ثم المنتظم. وايضاً الحدود الدنيا المعينة لـ Q(h) المعطاة بمتراجحة جيبيجيف بدلالة القيمة المشاهدة X للمتغير العشوائي ذو القيم العددية، فان متراجحة جيبيجيف يمكن اعادة صياغتها كما يأتي.

ان كمية Q(h) بالضرورة تساوي

$$P(|X-m| \le h\sigma)$$

بعبارة اخرى Q(h) تساوي احتمال ان القيمة مشاهدة لظاهرة عشوائية ذات قيم عددية، بدالة التوزيع F(.) تقع في فترة مركزها المتوسط وطولها 2h انحرافاً قياسياً.

تمارين

① باستعمال متراجحة جيبيشيف حدد عدد مرات رمي قطعة نقود متساوية الحدوث لاجل ان يكون نسبة عدد الصور المشاهدة الى عدد الرميات تقع باحتمال على الاقل ٠.٩٠ بين (٠.٤ ، ٠.٦)

② افترض ان عدد الطائرات الهابطة في مطار معين في فترة طولها ٢٠ دقيقة يتبع قانون احتمال بواسون بمتوسط ١٠٠ . استعمل متراجحة جيبيشيف لتحديد الحد الادنى لاحتمال ان عدد الطائرات الهابطة في اي فترة معطاة طولها ٢٠ - دقيقة سيكون بين ٨٠ الى ١٢٠.

③ اعتبر مجموعة مكونة من n رجل يلعبون لعبة (odd man out) اي انهم يقومون باعادة التجربة حيث كل رجل يرمي بصورة مستقلة قطعة نقود متساوية الحدوث حتى وجود رجل (odd man) فردي. بمعنى ان ما يكون بالضبط قطعة نقود واحدة من مجموع n قطعة تظهر صورة او بالضبط 1 من n قطعة تظهر الكتابة. جد عندما (i) $n=4$ (ii) $n=8$ الاحتمال المشروط لعدد مرات اعادة التجربة لكي تقود ان اللعبة ستكون ضمن انحرافين قياسيين لمتوسط عدد مرات الاعادة المطلوبة للعبة. قارن النتيجة مع الحد الحقيقي الادنى المعطى بمتراجحة جيبيشيف.

④ في توزيع باريتو المعرف احسب وارسم الدالة $Q(h)$ عند $A=1$ و $r=3$ وقارنها مع الحد الحقيقي الادنى المعطى بمتراجحة جيبيشيف.

Example. let the r.v. x have the p.d.f.

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ,\quad -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$$

find ⓐ The exact value of $p\{|X-\mu_x|\geq \frac{3}{2}\sigma\}$

ⓑ the chebyshev-inequality upperbound for this probability.

Sol ⓐ $\mu_x = E(x) = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x f(x)\,dx = 0$ [illegible]

$\sigma_x^2 = Ex^2-(Ex)^2 = 1$ [illegible]

$\therefore$

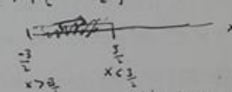
$$p\{|x-\mu_x|\geq \tfrac{3}{2}\sigma\} = p\{|x-0|\geq \tfrac{3}{2}(1)\}$$

$$= p\{|x|\geq \tfrac{3}{2}\}$$

$$= 1-p\{|x|<\tfrac{3}{2}\}$$

$$= 1-\{p\{x<\tfrac{3}{2}\}+p\{\underbrace{-x<\tfrac{3}{2}}_{\times(-1)}\}$$

$$= 1-\{p\{x<\tfrac{3}{2}\}+p\{x>-\tfrac{3}{2}\}$$



$-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$ [illegible]

$$=1-\{p\{-\tfrac{3}{2}<x<\tfrac{3}{2}\}$$

$$=1-\int_{-3/2}^{3/2} f(x)\,dx$$

$$=1-\int_{-3/2}^{3/2}\frac{1}{2\sqrt{3}}\,dx = 1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(x\Big|_{-3/2}^{3/2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\tfrac{3}{2}-(-\tfrac{3}{2})\right)=1-\frac{1}{2\sqrt{3}}(3)=1-\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{0.134}$$

⑤ $P\{|X-\mu_X| \geq \frac{3}{2}\sigma\} \leq \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 0.44.$

هذه المتباينة
تعطينا فكرة عن الابعاد
بدون ان نحسب
μ_X او σ_X.

Example let the r.v. X have the p.m.f. $f(x) = \begin{cases} 1/8 & x=-1 \\ 6/8 & x=0 \\ 1/8 & x=1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

if $k=2$ find the chebyshev inequality upper bound for the prob.

$$P\{|X - \mu_x| \geq k\sigma$$

and compare it with the exact value قارن وقارنها ع النتيجة.

$$P\{|X - \mu_x| \geq 2\sigma\} \leq \frac{1}{(2)^2} = 0.25$$

$$\mu_x = EX = \sum x\,p(x) = 0$$

$$\sigma_x^2 = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - 0 = EX^2$$

$$= \frac{2}{[illegible]} = \frac{1}{[illegible]}$$

$p\{|x-\mu_x| \geq k\sigma$

قارن
and compare it with the exact value وقارنها مع النتيجة

$p\{|x-\mu_x| \geq 2\sigma\} \leq \frac{1}{(2)^2} = 0.25$

$\mu_x = Ex = \sum x\,p(x) = 0$

$\sigma_x^2 = Ex^2 - (Ex)^2 = Ex^2 - 0 = Ex^2$

$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\sigma_x^2 = \frac{1}{4}$

$\sigma_x = \frac{1}{2}$

$p\{|x-\mu_x| \geq k\sigma\} = p\{|x-0| \geq k(\tfrac{1}{2})\}$

$= p\{|x| \geq \frac{k}{2}\}$ $k=2.$

$= p\{|x| \geq \frac{2}{2}\}$

$= p\{|x| \geq 1\}$

$\sigma_x^2 = \frac{1}{4}$

$\sigma_x = \frac{1}{2}$

$P[|X-\mu_x| \geq k\sigma] = P[|X-0| \geq k(\tfrac{1}{2})]$

$= P\{|X| \geq \frac{k}{2}\}$ $k=2$.

$= P\{|X| \geq \frac{2}{2}\}$

$= P\{|X| \geq 1\}$

$= 1 - P\{|X| < 1\}$

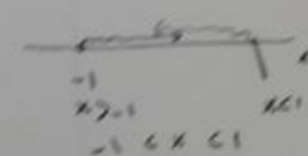
$= 1 - \{P\{X<1\} + P\{\underbrace{-X<1}_{X>-1}\}\}$

$= 1 - \{P(X<1) + P\{X>-1\}\}$

$= 1 - P\{-1<X<1\}$

$= 1 - P(X=0)$

$= 1 - \frac{6}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$



∴ Upper bound = exact value = 0.25

ppose that x is a r. v. with mean $\mu = 20$ and Variance $^2 = 16$. Find the prob. that will x lie between 15 and 25.

Sol

$$p(15 < x < 25) = p\{15 - \mu < x - \mu < 25 - \mu\}$$

$$= p\{15 - 20 < x - \mu < 25 - 20\}$$

$$= p\{-5 < x - \mu < 5\}$$

$$= p\{|x - \mu| < 5\}$$

تمثل k

but we have

$$p\{|x - \mu| < k\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$\therefore p\{|x - \mu| < 5\} \geq 1 - \frac{16}{(5)^2}$$

$$p\{|x - \mu| < 5\} \geq 1 - \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow p\{|x - \mu| < 5\} \geq \frac{9}{25}$$

x if itis Know that x has amean of 25 and avaric
of 16, then find $p\{17 < x < 33\}$?

Sol $p(17 < x < 33) = p\{17-\mu < x-\mu < 33-\mu\}$

but we have $\mu = 25$ then

$= p\{17-25 < x-\mu < 33-25\}$

$= p\{-8 < x-\mu < 8\}$

$= p\{|x-\mu| < 8\}$

$k = 8$.

we have $p\{|x-\mu| < k\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$

$= p\{|x-\mu| < 8\} \geq 1 - \frac{16}{(8)^2}$

$= p\{|x-\mu| < 8\} \geq 1 - \frac{16}{64}$ $64-16=48$

$= p\{|x-\mu| < 8\} \geq \frac{48}{64}$