وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة المستنصرية
كلية الادارة والاقتصاد

القسم : الاقتصاد
المرحلة: الرابعة
المادة : تطبيقات الحاسوب

المحاضرة السادسة

6

عنوان المحاضرة

توصيف النموذج

مدرس المادة
علياء هاشم محمد

الصيغ الرياضية لنماذج الانحدار
Mathematical Form for Linear Models

الصيغ الخطية The Linear Form

يمكن كتابة الصيغة الخطية على النحو التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \qquad (5.1)$$

وتمثل المعادلة (5.1) العلاقة الخطية التي تربط المتغير التابع Y بالمتغير المستقل X، ويمكن تقدير هذه المعادلة بطريقة المربعات الصغرى العادية Ordinary Least Squares (OLS)، وهي تعتبر أهم وأكثر الطرق شيوعاً في تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي كما سيأتي شرحه في الفصل السادس.

حيث ان

Y: المتغير التابع

X: المتغير المستقل

β_0: مقدار ثابت، وهو عبارة عن الجزء المقطوع من محور Y، ويمثل قيمة Y عندما $X=0$.

β_1: معامل انحدار Y على X ويمثل ميل خط الانحدار، ويقيس التغير في Y نتيجة تغير X بوحدة واحدة.

ε: حد الخطأ العشوائي أو المتغير العشوائي.

توجد ثلاث حالات مختلفة لمعامل الانحدار β_1 هي:

1. إذا كانت β_1 موجبة $(\beta_1 > 0)$ فهذا يعني أن كل زيادة أو (نقصان) في X يتبعها زيادة أو (نقصان) في Y، بالتالي يمكن القول بأنه توجد علاقة طردية بين X ,Y.
2. إذا كانت β_1 سالبة $(\beta_1 < 0)$ فهذا يعني أن كل زيادة أو (نقصان) في X يتبعها نقصان أو (زيادة) في Y، بالتالي يمكن القول بأنه توجد علاقة عكسية بين X ,Y.
3. إذا كانت $\beta_1 = 0$ في هذه الحالة فإن الزيادة أو (النقصان) في X لن تؤدي إلى تغير في قيمة Y المناظرة، بمعنى أن Y تكون ثابتة وهذا يدل على عدم وجود علاقة خطية بين X ,Y.

العلاقة بين الميل والمرونة

كما ذكرنا سابقاً، الميل عبارة عن التغير في Y نتيجة تغير X بوحدة واحدة، أي أن الميل يقيس الأثر الحدي لـــ X على Y، أما المرونة فتقيس الأثر النسبي لـــ X على Y ومن ثم فإن المرونة عبارة عن التغير النسبي في المتغير التابع نتيجة تغير المتغير المستقل بـــ 1%.

ميل خط انحدار Y على X (الأثر الحدي لـــ X على Y) يعطي من المعادلة:

$$\beta_1 = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \qquad (5.2)$$

مع ملاحظة أن الميل (الأثر الحدي) يساوي دائما المشتقة الأولي لـــ Y بالنسبة X.

المرونة (الأثر النسبي لـــ X على Y):

مرونة Y بالنسبة لـــ X يرمز لها بالرمز $E_{Y,X}$ ويمكن حسابها من المعادلة:

$$E_{Y,X} = \frac{\Delta Y/Y}{\Delta X/X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \times \frac{X}{Y} = \beta_1 \frac{X}{Y} \qquad (5.3)$$

فمثلاً إذا كان X، Y يمثلان الدخل والاستهلاك على الترتيب فإن $\beta_1 = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ يمثل الميل الحدي للاستهلاك، $\frac{Y}{X}$ يمثل الميل المتوسط للاستهلاك، ويقاس عند أي نقطة على خط الانحدار بميل الخط المستقيم الواصل من هذه النقطة إلى نقطة الأصل، وبالتالي فإن:

مرونة الاستهلاك على الدخل = الميل الحدي للاستهلاك / الميل المتوسط للاستهلاك

يمكن توضيح العلاقة بين الميل والمرونة من خلال المثال التالي:

مثال (1.5)

بافتراض أن معادلة خط Y على X هي:

$$Y = 5 + 2X \qquad (5.4)$$

تبين من معادلة (5.4) ما يلي:

1. ميل خط انحدار Y على X يساوي 2، أي أن الأثر الحدي لـــ X يكون دائماً مساوياً لـــ 2 ، وهذا يعني أن التغير في X بوحدة واحدة سوف يؤدي دائماً إلى التغير في Y بمقدار2 وحدة، حيث أنه عند زيادة X بوحدة واحدة مثلاً من 1 إلى 2 فإن Y تزداد من 7 إلى 9، أو إذا زادت قيمة X من 2 إلى 3 فإن Y تزداد من 9 إلى 11 وهكذا.
2. الأثر النسبي لـــ X يكون مختلفاً من نقطة إلى أخرى على الخط المستقيم، فمثلاً:
   - إذا كانت $X=1$ فإن $Y=7$، فإن المرونة تساوي $E=\frac{1}{7}\times 2=\frac{2}{7}$
   - أما إذا كانت $X=2$ فإن $Y=9$ ، فإن المرونة تساوي $E=\frac{2}{9}\times 2=\frac{4}{9}$

ملاحظات على الميل والمرونة

- إشارة الميل هي نفس إشارة المرونة.
- عندما تكون العلاقة بين X ,Y خطية، فإن الميل يكون ثابتاً عند أي نقطة على الخط المستقيم، بينما المرونة تكون مختلفة من نقطة إلى أخرى على نفس الخط المستقيم.

2.2.5 الصيغة التربيعية The Quadratic Form

الصيغة التربيعية هي معادلة من الدرجة الثانية وتكون على النحو التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \varepsilon \qquad (5.5)$$

ميل خط انحدار Y على X (الأثر الحدي لـ X على Y) يعطي من المعادلة:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \beta_1 + 2\beta_2 X \qquad (5.6)$$

أما المرونة (الأثر النسبي لـ X على Y) تعطي من المعادلة:

$$E_{Y,X} = (\beta_1 + 2\beta_2 X)\left(\frac{X}{Y}\right) \qquad (5.7)$$

المتغيرات المستقلة المتباطئة زمنياً

The Lagged Independent Variables

تحتوى بعض العلاقات الاقتصادية على متغيرات متباطئة زمنياً، وقد تكون لفترة واحدة وأكثر. فمثلاً قد يتأثر حجم المبيعات لإحدى الشركات بالدعاية لسنة سابقة أو لسنتين سابقتين، وكذلك يتأثر بعدد العاملين في الشركة لسنة سابقة أو لسنتين سابقتين، والتي على ضوءها يستطيع مدير الشركة من بناء واتخاذ قراره بشأن تحديد مستوى الإنفاق على الدعاية وكذلك تحديد عدد العاملين في الشركة المطلوب لزيادة حجم المبيعات. دراسة أثر الدعاية المتباطئ زمنياً أو عدد العاملين المتباطئ زمنياً على زيادة حجم المبيعات يجعل التوقعات المستقبلية قريبة من الواقع وسهولة تفسيرها اقتصادياً.

إن إدخال مثل هذه المتغيرات في تحليل الانحدار يجعل نطاق التحليل أقرب إلى الواقع العملي. وفي نماذج السلاسل الزمنية خاصة توجد فترة أساسية من الزمن تقع بين اتخاذ القرار والتأثير النهائي للتغير في المتغيرات الاقتصادية، فإذا كانت فترة اتخاذ القرار والمتغير المؤثر بها طويلة، فيكون في هذه الحالة من الضروري إدخال عنصر الإبطاء الزمني لهذا المتغير المستقل.

مثال (2.5):

بافتراض أن استهلاك الأسرة يعتمد على الدخل المتاح للإنفاق بالشيقل (الدولار = 3.6 شيقل) في هذا الشهر والشهر الماضي. يمكن كتابة المعادلة على النحو التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \varepsilon \qquad (5.27)$$

حيث أن:

Y: استهلاك الأسرة، X: الدخل المتاح للإنفاق، β_0: المقدار الثابت،

t: الشهر الحالي، $t-1$: الشهر السابق، ε: حد الخطأ العشوائي.

في المعادلة (5.27) تعتمد قيمة استهلاك الأسرة على المجموع المرجح للقيم الحالية والسابقة للمتغيرات المستقلة وهي X_t, X_{t-1} وعلى حد الخطأ العشوائي أيضاً.

ملاحظات:

- الميل الحدي للاستهلاك قصير الأجل مساويا β_1 بينما الميل الحدي للاستهلاك طويل الأجل يكون مساويا لـ $\beta_1 + \beta_2$.
- فمثلا بافتراض أن نموذج استهلاك الأسرة المُقدّر يعطى من المعادلة:

$$Y = 20 + 0.6X_1 + 0.2X_2 \qquad (5.28)$$

- في هذه الحالة يكون الميل الحدي للاستهلاك قصير الأجل يساوي 0.6، ويعني ذلك أن زيادة في الدخل الشخص المتاح للإنفاق بمقدار شيقل واحد (الدولار = 3.6 شيقل) سوف يؤدي إلى زيادة استهلاك الأسرة في نفس الشهر بمقدار 0.6 شيقل.
- بينما الميل الحدي للاستهلاك طويل الأجل يساوي 0.8=0.2 +0.6، ويعني ذلك أن زيادة الدخل الشخص المتاح للإنفاق بمقدار شيقل واحد سوف يؤدي إلى زيادة استهلاك الأسرة في المدى طويل الأجل بمقدار 0.8 شيقل.

اختيار المتغيرات المستقلة

Choosing the Independent Variables

قبل تقدير العلاقة المراد دراستها بين المتغير التابع والمتغير المستقل أو المتغيرات المستقلة يجب توصيف النموذج، وقد شرحنا في بداية هذا الفصل الصيغ الرياضية المختلفة لنماذج الانحدار، والآن سنتناول باختصار مفهوم اختيار المتغيرات المستقلة.

حذف المتغيرات المستقلة Omitted Independent Variables

يوجد سببان لعدم وجود متغير مستقل (أو متغيرات مستقلة) مهم في النموذج هما:

1. أن يكون قد تم تجاهل ذلك المتغير من قبل الباحث أو النسيان.
2. ألا يتوفر بيانات حول ذلك المتغير.

في كلٍ من الحالتين فإن ذلك سوف يؤدي إلى مشكلة تحيز حذف متغير، أو بصورة أكثر شمولية مشكلة في تحيز توصيف النموذج. والسبب في ذلك أن المتغير غير الموجود في النموذج لا يمكن اعتباره ثابتاً. ومن الجدير بالذكر أن حذف متغير مستقل مهم يجعل المعادلة المُقدّرة غير دقيقة وذلك بسبب تحيز في تقدير قيم معاملات الانحدار.

بافتراض أن معادلة الانحدار الفعلية هي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i \qquad (5.36)$$

حيث أن ε_i حد الخطأ العشوائي أو العنصر العشوائي.

إذا تم حذف المتغير X_3، فتصبح المعادلة (5.36) على الصورة التالية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i^* \qquad (5.37)$$

حيث أن: $\varepsilon_i^* = \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$

وبالتالي فإن المتغيرات المستقلة في المعادلة (5.37) غير مستقلة عن حد الخطأ العشوائي (ما لم يكن المتغير X_3 المحذوف لا يرتبط مع كل المتغيرات المستقلة الأخرى)، أي أن هناك ارتباط بين المتغيرات المستقلة وحد الخطأ العشوائي.

الاثار المترتبة على حذف متغير مستقل

من أهم الآثار المترتبة على حذف متغير مستقل هو أن تصبح تقديرات معاملات الانحدار متحيزة أي أن:

$$E(\hat{\beta}_i) \neq \beta_i \qquad (5.38)$$

ويكون التحيز في تقدير معاملات الانحدار موجوداً ما لم تكن:

1. القيمة الفعلية لمعامل الانحدار للمتغير المحذوف يساوي صفراً.
2. المتغير المستقل المحذوف والمتغيرات المستقلة الأخرى غير مرتبطة فيما بينها.

المتغيرات غير الملائمة

يقصد بالمتغيرات غير الملاءمة (غير ذات الصلة) هو إضافة متغير مستقل إلى معادلة الانحدار، وهو في الواقع غير ملائم من الناحية الاقتصادية، وهذه الحالة هي عكس حالة حذف متغيرات مستقلة مهمة.

بافتراض أن معادلة الانحدار الفعلية هي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \varepsilon_i \qquad (5.39)$$

حيث أن ε_i حد الخطأ العشوائي الكلاسيكي.

بافتراض تم إضافة المتغير X_2، فتصبح المعادلة (5.39) على الصورة التالية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i^{**} \qquad (5.40)$$

حيث أن: $\varepsilon_i = \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i^{**}$ بالتالي $\varepsilon_i^{**} = \varepsilon_i - \beta_2 X_{2i}$

معالجة حذف متغير مستقل

نظرياً معالجة حذف متغير مستقل يبدو سهلاً وهو إضافة المتغير المستقل المحذوف إلى المعادلة، ولكن هذا لا يتفق مع الواقع العملي لعدة أسباب منها ما يلي:

- من الصعب معرفة التحيز الناتج عن حذف متغير مستقل، لأنه ربما يكون مقدار هذا التحيز قليلاً فبالتالي يكون من الصعب اكتشافه.
- في حالة معرفة أن معادلة الانحدار المُقدَّرة تعاني من مشكلة التحيز في تقدير المعاملات، تظهر مشكلة أخرى وهي كيف يمكن معرفة أي من المتغيرات المستقلة يجب إدخاله إلى المعادلة المطلوبة.

الاثار المترتبة على اضافة متغيرات غير ملائمة

إضافة متغير مستقل غير ملائم لن يُحْدِث تحيز في تقدير المعاملات، لأن قيمة معامل الانحدار للمتغير غير المناسب تساوي صفراً، وبالتالي فإن $\beta_2 X_{2i} = 0$ ولكن من أهم الآثار المترتبة على إضافة متغير أو متغيرات غير ذات ملائمة هي:

- زيادة تباين معاملات الانحدار المُقدَّرة.
- بالتالي تقل قيمة اختبار T المُطْلَقة مما يؤدي إلى عدم رفض الفرضية الصفرية.
- نقص في قيمة معامل التحديد المُعدَّل $\bar{R}^2$ وليس في قيمة معامل التحديد R^2.

معالجة اضافة متغيرات غير ملائمة

من أفضل الطرق لمعالجة إضافة متغيرات مستقلة غير ملائمة هـو حـذف ذلـك المتغير المستقل غير الملائم من نموذج الانحدار.

جدول (2.5) يبين تأثير حذف متغيرات مستقلة مهمة أو إضافة متغيرات مستقلة غير ملائمة على تقديرات معاملات الانحدار.

جدول (2.5) مقارنة تأثير حذف متغيرات مستقلة أو إضافة متغيرات مستقلة غير ملائمة

التأثير على تقديرات المعادلات	حذف متغيرات مستقلة مهمة	إضافة متغيرات مستقلة غير ملائمة
التحيز	نعم	لا
التباين	يقل	يزداد