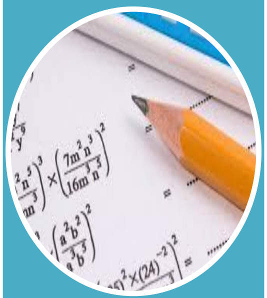
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي/الجامعه المستنصريه

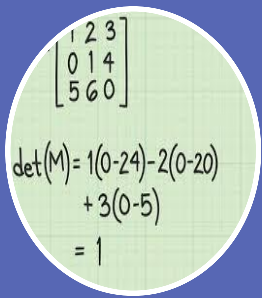
كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

الدراسات الاولية/المرحلة الثانية

للعام الدرسي 2020-2021



المصفوفات



الاستاذ المساعد الدكتورة

سهاد علي شهيد مجيد

Matrices

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

المرحلة الثانية (صباحي+مسائي)

2021-2020

الفصل الاول .... المصفوفات (The Matrix)

المحاضرة الثانية

الفصل الاول

2. مصفوفة الصف ومصفوفة العمود ، ومنها:

a –مصفوفة الصف (Row Matrix) : هي مصفوفة تتالف من صف واحد وأي عدد من الاعمدة $1 \times n$
$(a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots)$

b –مصفوفة العمود (Column Matrix): هي مصفوفة مكونة من عمود واحد واي عدد من الصفوف
$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \end{pmatrix} m \times 1$

3.المصفوفة الصفرية (Null Matrix) : هي مصفوفة كل عناصرها اصفار ويرمز لها بالرمز $(\mathbf{0})$ من خصائصها انها تُعد محايد جمعي $A + 0 = 0 + A = A$ و $A0 = 0A = 0$ ، مثل $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots .$

4.اثر المصفوفة (Trace of Matrix): في المصفوفة المربعة نسمي العناصر $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ، عناصر قطرية ونسمي حاصل جمع العناصر القطرية لمصفوفة مربعة مثل A بأثر المصفوفة (Trace of Matrix).

5.المصفوفات المتساوية (Equality Matrices):

يقال ان المصفوفتين $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ متساويتان فيما اذا كان (وإذا كان فقط) ، هاتان المصفوفتان من درجة واحدة وكان كل عنصر من احداهما مساوياً للعنصر المقابل لهُ من المصفوفة الثانية ، اي اذا كان واذا كان فقط.

$a_{ij} = b_{ij} \quad , i = 1,2, \ldots, m \, ; \; j = 1,2, \ldots, n$

اي تكون مصفوفتين متساويتين فيما إذا كانت واذا كانت فقط احداهما نسخة من الثانية.

مثال(2) : اذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & c & -1 \\ d & a + c & -1 \end{pmatrix}$ وكانت $A = B$ فأوجد كل من a, b, c, d ؟

الحل :

حيث ان $A=B$ ينتج ان $a+c=\ b, d=0, a=-1, c=-1$ أي ان

$b=-1-1=-2$ وعليه فأن $A=B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$

1 3 العمليات الحسابية في المصفوفات

1 3 ~~1~~ جمع وطرح المصفوفات: (Additive and Subtraction of matrices)

لجمع وطرح المصفوفات يجب ان تكون من نفس الدرجة وعند الجمع او الطرح نقوم بجمع او طرح كل عنصر مع نظيره في الموقع من المصفوفة المقابلة. اي إذا كانت المصفوفات A, B, C متوافقة بالنسبة للجمع والطرح (يقصد بالمتوافقة ان تكون من نفس الرتبة) فإنهُ ينطبق عليها :

1. خاصية التبديل ، اي ان: $A+B=B+A$.
2. (قانون جمع الحدود الجبرية) ، اي ان: $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. خاصية التوزيع $(A+B)*k=Ak+Bk=k(A+B)$ (حيث k مقدار عددي).
4. توجد مصفوفة مثل D بحيث يكون $A+B=D$.

هذهِ القوانين تنتج من قوانين الجبر الابتدائي التي تحكم جمع الاعداد وجمع متعددات الحدود ، كما وأن هذهِ القوانين تبين ان خواص جمع المصفوفات المتوافقة مطابقة مع خواص جمع عناصر هذهِ المصفوفات.

1 3 ~~2~~ ضرب المصفوفات: (Product of Matrices)

اذا كان لدينا مصفوفتان A و B فإنه لإيجاد AB يجب ان يكون عدد أعمدة A مساوي الى عدد صفوف B اي ان :

$$A_{m\times n}\qquad B_{n\times L}\qquad = C_{m\times L}$$

<u>مثال(3) :</u> اذا كانت $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ وكانت $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ فأوجد AB وكذلك اوجد BA؟

<u>الحل :</u>

لا يمكن الحصول على AB لان ابعاد المصفوفتين غير متوافق : $A_{3\times 3}\qquad B_{2\times 3}$

يمكن الحصول BA لأنه : $B_{2\times 3}\qquad A_{3\times 3}=C_{2\times 3}$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3)+(-1)0+1(1) & 2(2)+(-1)(-1)+1(2) & 2(1)+(-1)5+1(3) \\ 3(3)+1(0)+2(1) & 3(2)+1(-1)+2(2) & 3(1)+1(5)+2(3) \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 11 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

☑ **ملاحظة :عند ضرب المصفوفة بعدد نضرب العدد في كل عنصر من عناصر المصفوفة .**

مثال(4) : اذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ فأوجد $3A - 2B + I$ ؟

الحل :

$$3A - 2B + I = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

☑ **ملاحظة: ضرب المصفوفات ليس ابدالي إلا في حالات خاصة أي أن : $AB \neq BA$.**

مثال(5) : اذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة C بحيث يكون $CA = B$ ؟

الحل :

$$C_{m\times \underset{\uparrow}{n}} \quad A_{\underset{\uparrow}{2}\times 3} = B_{2\times 3} \rightarrow m = 2 , n = 2$$

يجب ان تكون $C_{2\times 2}$ نفرض ان $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$CA = B \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

محاضرات د. سهاد علي شهيد

$$\begin{pmatrix} a+b & 2a-b & -a \\ c & d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore a+b=3 \qquad c+d=4$

$\underline{2a-b=6} \qquad \underline{2c-d=-1}$

$3a=9 \qquad 3c=3$

$\rightarrow a=3 \rightarrow b=0 \qquad \rightarrow c=1 \rightarrow d=3$

$\left(\begin{matrix} -a=-3 \rightarrow a=3 \\ -c=-1 \rightarrow c=1 \end{matrix} \quad \text{للتحقق}\right)$

$\therefore$ المصفوفة C هي

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

اما حاصل الضرب مصفوفتين مثل $A \times B$ بهذا الترتيب اذ المصفوفة $A = [a_{11}a_{12}a_{13} \dots a_{1m}]$ والتي درجتها $1 \times m$ ، والمصفوفة $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ والتي درجتها $m \times 1$. فإنهُ يقصد بالمصفوفة $c =$ $[a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots a_{1m}b_{m1}]$ ، التي درجتها 1×1 ، اي ان:

$$[a_{11}a_{12}a_{13} \dots a_{1m}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots a_{1m}b_{m1}] = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1}$$

☑**<u>ملاحظة</u> : يجب ملاحظة ان هذه العملية هي صف في عمود : يضرب كل عنصر من الصف بالعنصر المقابل لهُ من العمود وتجمع حواصل الضرب.**

$$C = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad ; i = 1,2,\dots,m \; ; \; j = 1,2,\dots,n$$

حيث ان: $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times p$ ، وان $B = [b_{ij}]$ من الدرجة $p \times n$ اي بمعنى A مكونة من m من الصفوف وان B مكونة من n من الاعمدة ، لتكوين $C = A \times B$ فإن كل صف من A يضرب مرة ومرة واحدة فقط في كل عمود من اعمدة المصفوفة B ، وان العنصر c_{ij} من المصفوفة C هو حاصل ضرب الصف ذي الرقم i من A بالعمود ذي الرقم j من B.

<u>مثال(6): جد حاصل الضرب للمصفوتين الاتيتين :</u>

$$[2 \quad 3 \quad 4]\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} = [2 * 1 + 3 * (-1) + 4 * 2] = [2 - 3 + 8 = 10 - 3] = [7]$$

$$[3 \quad -1 \quad 4]\begin{bmatrix}-2\\6\\3\end{bmatrix} = [3 * (-2) + (-1) * (6) + 4 * 3]$$

$$= [-6 + (-6) + 12 = -12 + 12] = [0]$$

<u>مثال(7):</u>

$$AB = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}_{3\times 2}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix}a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}\\a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}\end{bmatrix}$$

لنفترض ان المصفوفات A, B, C متوافقة بالنسبة للجمع والضرب فإنهُ يكون:

1) $A(B + C) = AB + AC$ ، قانون التوزيع الاول.
2) $(A + B)C = AC + BC$ ، قانون التوزيع الثاني.
3) $(AB)C = A(BC)$ ، قانون التنسيق (قانون ترتيب الحدود).
4) $AB \neq BA$ ، بصورة عامة.
5) $AB = O$ ، ليس بالضرورة ان يكون $A = O$ او $B = O$.
6) $AB = AC$ ليس بالضرورة ان يكون $B = C$.