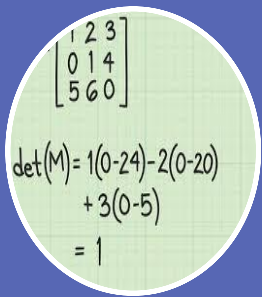
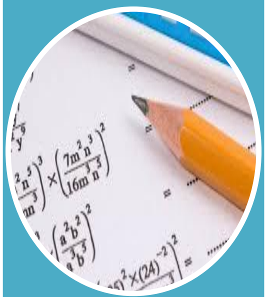
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي/الجامعه المستنصريه

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

الدراسات الاولية/المرحلة الثانية

للعام الدرسي 2020-2021



المصفوفات

Matrices

الاستاذ المساعد الدكتورة

سهاد علي شهيد مجيد

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

المرحلة الثانية (صباحي+مسائي)

2021-2020

الفصل الاول .... المصفوفات (The Matrix)

- ❖ 1−1 المقدمة.
- ❖ 1−2 بعض انماط المصفوفات.
- ❖ 1−3 العمليات الحسابية على المصفوفات.
- ❖ 1−4 مبدلة المصفوفة.
- ❖ 1−5 العمليات الصفية الاولية
- ❖ 1−6 بعض تطبيقات المصفوفات.
- ❖ تمارين نهاية الفصل

المحاضرة الرابعة

الفصل الاول

4−1 مبدل المصفوفة: (Transpose of Matrix)

إذا كان لدينا مصفوفة $A_{m\times n}$ فإن مبدل المصفوفة هو $A^t{}_{n\times m}$ أي نجعل كل صف من المصفوفة A عمود في المصفوفة A^t او العكس كل عمود من المصفوفة A نجعله صف من A^t (صف اول يصبح عمود اول وصف ثاني يصبح عمود ثاني وهكذا ...).

مثال(12) : اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ فأوجد A^t

الحل :

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1−4−1 خصائص مبدل المصفوفة (Properties of transpose matrix)

1) $(A^t)^t = A$
2) $(rA)^t = rA^t$
3) $(A \mp B)^t = A^t \mp B^t$
4) $(AB)^t = B^tA^t$
5)

2−4−1 المصفوفة المتماثلة والمتماثلة تخالفياً (Symmetric and Reverse Matrix) :

a− المصفوفة المتماثلة (Symmetric Matrix): هي مصفوفة تساوي مبدلتها $(A = A^t)$ عندها يقال ان A متماثلة.

b− المصفوفة المتماثلة (تخالفيا) عكسياً (Reverse Matrix) : هي المصفوفة التي تحقق الشرط $(A = -A^t)$ ، عندها يقال ان A متماثلة عكسياً .

مثال (13) : المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ متماثلة (Symmetric) لانه $(A = A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

اما المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ متماثلة عكسياً (Reverse) لأنه $(A = -A^t)$ حيث ان:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } A^t = -\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = A$$

<u>**مثال(14) :**</u> جد المصفوفة $A_{3\times3}$ بحيث تكون متماثلة عكسياً ؟

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>**مثال(15) :**</u> اثبت ان $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ متماثلة عكسياً ؟

5-1 العمليات الأولية على المصفوفات Elementary operations on matrices

a) العمليات الصفية الأولية : هي عمليات تجري على صفوف المصفوفة بهدف اختزالها وتتلخص تلك العمليات بالاتي :

1 تبديل صفوف مثلاً : $R_1 \leftrightarrow R_2$ او $R_1 \leftrightarrow R_3$

2 ضرب احد صفوف المصفوفة بعدد غير الصفر : مثل $-3R_1$ او $\frac{1}{2}R_2$ ...

3 ضرب احد صفوف المصفوفة بعدد غير الصفر وجمع النواتج مع صف اخر : مثلاً

$2R_1 + R_2$ او $-3R_1 + R_3$

☑<u>**ملاحظة**</u> **:الصف الذي يتغير المجموع عليه اما المضروب يبقى كما هو (الضرب ذهنياً) ثم جمع النواتج مع الصف الاخر .**

☑<u>**ملاحظة:**</u> **يمكن تكرار العمليات السابقة للوصول الى $(r.e.f)$ او $(r.r.e.f)$**

<u>*** صيغة الدرجة الصفية row echelon form ($r.e.f$) :**</u>

نقول ان المصفوفة على صيغة الدرجة الصفية (r.e.f) اذا تحقق :

1- الصفوف الصفرية ان وجدت فإنها تكون صفوف أخيرة .

2− وكل صف غير صفري يجب ان يكون اول عنصر فيه 1 (يسمى الواحد المتقدم) .

3− كل واحد متقدم في أي صف يجب ان يكون على اليمين بالنسبة للواحد المتقدم في الصفوف التي فوقه . وكما موضح ادناه :

$$\begin{pmatrix}1&4&3&7\\0&1&6&2\\0&0&1&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&2&6&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

*** صيغة الدرجة الصفية المختزلة reduced row echelon form $(\mathbf{r.r.e.f})$**

نقول ان المصفوفة على الصيغة الدرجة الصفية المختزلة (r.r.e.f) اذا تحقق الشروط الثلاث اعلاه في (r.e.f)

: إضافة للشروط الثلاثة السابقة في الصيغة الدرجة يجب ان تحقق شرط رابع :

4− كل واحد متقدم يجب ان يكون باقي عناصر عموده اصفار .

$$\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&7\\0&0&1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

1−5−1 منهجية الاختزال :

لفهم منهجية الاختزال يجب ان تعرف كيف يتم الوصول الى الشكل $(\mathrm{r.e.f})$ او $(\mathrm{r.r.e.f})$ ، وتتلخص بالخطوات الاتية:

- ✓ نجعل العنصر a_{11} واحد : تبديله مع صف اخر تحته يكون اول عنصر فيه 1 او بضرب صف تحته بعدد وجمعه مع الصف الأول او بقسمه الصف الأول على العنصر a_{11} .
- ✓ نصفر كل العناصر التي تحت a_{11} : نضرب الصف الأول بعكس إشارة a_{21} ونجمع النواتج مع الصف الثاني ونضرب الصف الأول في عكس إشارة a_{31} ونجمع النواتج مع الصف الثالث وهكذا .
- ✓ نجعل العنصر a_{22} واحد بنفس طريقة الخطوة الأولى ودون التعامل مع الصف الأول .
- ✓ نصفر كل العناصر التي تحت a_{22} بنفس طريقة الخطوة الثانية . ثم نجعل a_{33} واحد ونصفر ما تحته وهكذا .

☑**ملاحظة: عند جعل عنصر ما واحداً a_{11} او a_{22} او ... اذا كان صفر وما تحته اصفار ننتقل الى العنصر الذي على يمينه ونجعله واحد ثم نصفر ما تحته .**

☑**ملاحظة: اثناء الاختزال اذا وجد صف كله اصفار ننقله نجعله صف أخير .**

بهذا نكون قد وصلنا الى الشكل $(r.e.f)$ ، ولتكملة الاختزال الى الشكل $(r.r.e.f)$ يضاف للخطوات السابقة الخطوة الاتية:

- ✓ نبدأ من اخر واحد متقدم ونصفر العناصر التي فوقه ثم الواحد المتقدم قبل الأخير ونصفر ما فوقه وهكذا ... .

مثال (16): ضع كلاً من المصفوفات التالية على الصيغة الدرجية الصفية $(r.e.f)$ ، ثم على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة $(r.r.e.f)$ ؟

الحل :

$$A=\begin{bmatrix}2&2&2&4\\7&3&4&4\\6&1&2&1\end{bmatrix}_{\frac{1}{2}R_1} \sim \begin{bmatrix}1&1&1&2\\7&3&4&4\\6&1&2&1\end{bmatrix}_{-7R_1+R_2\ \text{و}\ -6R_1+R_3} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-4&-3&-10\\0&-5&-4&-11\end{bmatrix}_{-1R_3+R_2} \sim \begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&1\\0&-5&-4&-11\end{bmatrix}_{5R_2+R_3} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&1\\0&0&1&-6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&0&8\\0&1&0&7\\0&0&1&-6\end{bmatrix}_{-1R_2+R_1} \sim$$

على الشكل صيغة درجية $r.e.f$

$-1R_3+R_2$ و $-1R_3+R_1$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&7\\0&0&1&-6\end{bmatrix}$$

على الشكل صيغة درجة مختزلة$(r.r.e.f)$

☑**ملاحظة: المصفوفة الناتجة لا تساوي المصفوفة A وانما تكافئها .**

مثال (17) :

$$A=\begin{bmatrix}5&2&2\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix}_{-1R_1+R_3} \sim \begin{bmatrix}5&2&2\\7&3&4\\1&-1&0\end{bmatrix}_{R_1\leftrightarrow R_3} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0\\7&3&4\\5&2&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&10&4\\0&7&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&\frac{2}{5}\\0&7&2\end{bmatrix}$$

$-7R_1+R_2$ و $-5R_1+R_3$ ، $\frac{1}{10}R_2$ ، $-7R_2+R_3$

$$\sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&\frac{2}{5}\\0&0&-\frac{4}{5}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&\frac{2}{5}\\0&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$-\frac{5}{4}R_3$ ، $-\frac{2}{5}R_3+R_2$ ، $1R_2+R_1$

حل اخر للمثال(17):

$$A=\begin{bmatrix}5&2&2\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-1&1&0\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix} \sim$$

$-1R_3+R_1$ ، $-1R_1$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix}$$

$-1R_1$

و يمكن دمج العمليتين السابقتين في عملية واحدة

$$A=\begin{bmatrix}5&2&2\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&10&4\\0&7&2\end{bmatrix} \sim$$

R_3-R_1 ، $-7R_1+R_2\ ,-6R_1+R_3$ ، $2R_2, 3R_3$

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&20&8\\0&21&6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&21&6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&48\end{bmatrix} \sim$$

R_3-R_2 ، $-21\,R_2+R_3$ ، $\frac{1}{48}\,R_3$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$2\,R_3+R_2$ ، $1\,R_2+R_1$

☑ **<u>ملاحظة</u> : شكل $(\mathbf{r.e.f})$ قد يختلف اذا غيرنا طريقة الاختزال لكن $(\mathbf{r.r.e.f})$ يبقى نفسه مهما تغيرت طريقة الاختزال .**

مثال(18) :

$$A = \underset{-1R_2 + R_1}{\begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}} \sim \underset{-2R_1 + R_2\,,\, -2R_1 + R_3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}} \sim \underset{-2R_2 + R_3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 18 \end{bmatrix}} \sim$$

$$\underset{-2R_2 + R_1}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -22 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال(19) :

$$A = \underset{-1R_1 + R_2\,,\, -2R_1 + R_3\,,\, -2R_1 + R_4\,,\, -1R_1 + R_5}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}} \sim$$

$$\underset{\frac{1}{3}R_2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{-3R_2 + R_3\,,\, -6R_2 + R_4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim$$

$$\underset{R_3 \leftrightarrow R_5}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{\frac{1}{5}R_3\,,\, R_4 \leftrightarrow R_5}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}} \sim$$

$$\underset{-\frac{1}{5}R_4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{-1R_4 + R_2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim$$

$$\underset{-1\,R_3 + R_2\,,\,-1R_3 + R_1}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{-1\,R_2 + R_1}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$