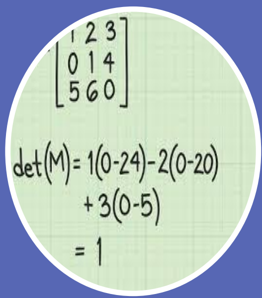
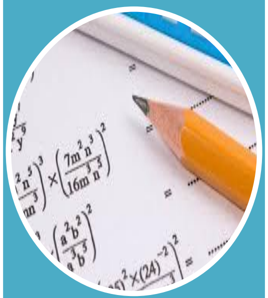
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي/الجامعه المستنصريه

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

الدراسات الاولية/المرحلة الثانية

للعام الدراسي 2020-2021





Matrices

الاستاذ المساعد الدكتورة

سهاد علي شهيد مجيد

المصفوفات

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

المرحلة الثانية (صباحي+مسائي)

2021-2020

الفصل الاول .... المصفوفات (The Matrix)

المحاضرة الخامسة

الفصل الاول

6-1 بعض تطبيقات المصفوفات :

ان عمليات المصفوفات الحسابية لها دوراً كبيراً في الحياة إذ أنها تستخدم في كثير من المجالات التطبيقية وذلك بغرض تسهيل العملية الحسابية وتجنب الأخطاء والنواتج غير الدقيقة. فهي كثيراً ما تستخدم في الجوانب الاقتصادية وذلك لمعرفة حساب المتغيرات التي تطرأ على العملية الاقتصادية مثل حساب المصروفات والتكاليف الشهرية أو السنوية وكذلك لمعرفة مدى الخسارة أو الارباح. لذا فإن الكثير من مصانع وشركات الإنتاج تفضل نظام المصفوفات لرصد وحساب سلعها الإنتاجية خاصة تلك المصانع التي تتألف من مجموعات ووحدات لإنتاج سلع مختلفة في آن واحد، ولأن المصفوفة تتكون من صفوف وأعمدة لذا فهي الطريقة المثلى لتمثيل الوحدات أو المجموعات الإنتاجية وسلعها. وكذلك نجد دور المصفوفات في الجوانب والتطبيقات الفيزيائية مثل تمثيل الدارات الكهربائية لمعرفة وحساب التيار الساري أو معرفة الفولتية أو أي متغير فيزيائي آخر من الدائرة وكذلك تستخدم في التطبيقات الميكانيكية لحساب القوى، كما أن المصفوفات تدخل في عمليات التشفير وإرسال الرسائل المشفرة لحفظ البيانات، كما تستخدم سلاسل ماركوف في الأرصاد الجوية و غيرها باحتمال ما سيكون عليه النظام في حالة معينة من معرفة الحالة السابقة لها وفي كثير من المجالات التطبيقية الأخرى.

اولاً- التطبيقات في الاقتصاد : Applications in Economy

ان استخدام المصفوفات في الاقتصاد يعد من اهم التطبيقات لكثرة استخدامه ، فمثلاً بفرض ان اقتصاد منطقة ما يقسم الى عدة قطاعات متنوعة كالصناعة والتجارة والمواصلات والاتصالات ، وبفرض اننا نعلم النتاج الكلي لسنة واحدة ونعلم تماماً كيفية تبادل كل قطاع بالنسبة للقطاعات الأخرى ، وندعو قيمة انتاج القطاع بـ السعر ومن اجل هذا اثبت لدينا النتيجة التالية : " يوجد معادلة أسعار متخصصة بالنتاج الكلي للقطاعات المتنوعة في كل منها طريقة ليتناسب الدخل مع التكاليف " كما في المثال التالي ((نفترض ان اقتصاد دولة ما يتألف من ثلاث قطاعات اساسية هي النفط

والطاقة الكهربائية والسياحة وانتاج كل منها يوزع بين القطاعات الاقتصادية المتنوعة الاخرى كما هو مبين في الجدول $(1-1)$ حيث ان العناصر الموجودة في الاعمدة تمثل بالأجزاء الكسرية الانتاج الكلي لكل قطاع، فمثلاً العمود الثاني من الجدول يمثل انتاج الطاقة الكهربائية موزعة كالتالي : 40% للنفط و 50% للسياحة والباقي 10% للكهرباء (أي للقطاع الكهربائي 10% كتكلفة) ، وان مجموع الأجزاء العشرية في كل عمود يجب ان يساوي الواحد 1 .

جدول $(1-1)$ انتاج بعض القطاعات الاقتصادية

Distribution of Output form:			
Oil	Electric	Tourism	Purchased by:
0.0	0.4	0.6	Oil
0.6	0.1	0.2	Electric
0.4	0.5	0.2	Tourism

نرمز للقيم الانتاج السنوي لكل من النفط ، الكهرباء ، السياحة بالرموز PT, PE, PO على التوالي ، والمطلوب إيجاد معادلة الأسعار التي تجعل دخل كل قطاع يتناسب مع تكاليفه .

<u>**الحل :**</u>

القيم الموجودة بالأعمدة تمثل استهلاك انتاج من قبل القطاعات الأخرى وبالمقابل في الصفوف تمثل حاجة القطاع ، فمثلاً الصف الأول من الجدول يبين ان قطاع النفط يتلقى 40% من نتاج الكهرباء و 60% من نتاج السياحة ، فتكون تكلفة القطاع النفط هي $0.4_{PE} + 0.6_{PT}$ ولكي يكون الدخل مساوياً التكلفة نكتب

$$PO = 0.4_{PE} + 0.6_{PT}$$

اما الصف الثالث

$$PT = 0.4_{PO} + 0.5_{PE} + 0.2_{PT}$$

ولحل جميع المعادلات الخطية ننقل جميع المجاهيل الى طرف الايسر من كل معادلة ونجمع الحدود المتشابهة :

$$PO - 0.4_{PE} - 0.6_{PT} = 0$$

$$-0.6_{PO} - 0.9_{PE} - 0.2_{PT} = 0$$

$$-0.4_{PO} - 0.5_{PE} + 0.8_{PT} = 0$$

ثم نقوم بالتحويلات الصفية الأولية ، وللتبسيط نوزع الحدود العشرية على مكانين

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.5 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.66 & -0.56 & 0 \\ 0 & -0.66 & 0.56 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.66 & -0.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.94 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل العام يساوي $PO = 0.94\ PT\ ,\ 0.4PE = 0.85PT$ ومتجه المعادلة يكون

$$P = \begin{bmatrix} PO \\ PE \\ PT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94\ PT \\ 0.85\ PT \\ PT \end{bmatrix} = PS \begin{bmatrix} 0.94 \\ 0.85 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ثانياً: موازنة المعادلات الكيميائية : Balancing Chemical Equations

المعادلات الكيميائية تحدد كميات المواد المتفاعلة والمواد الناتجة بالتفاعل الكيميائي ، وسنأخذ المثال التالي : وهو احتراق غاز البروبان أي عند تفاعل C_3H_8 مع الاكسجين O_2 ليشكل ثنائي أكسيد الكربون CO_2 وبخار الماء H_2O كما في المعادلة الكيماالاتية:

$$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \rightarrow (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O$$

ولموازنة المعادلة يجب إيجاد جميع الاعداد x_1, x_2, x_3, x_4 بحيث يكون عدد ذرات كل من الكربون (C) والهيدرجون (H) والاوكسجين (O) في الطرف الايسر مطابقاً لها في الطرف الأيمن (لان الذرات لا تفنى ولا تستحدث ذرات جديدة خلال التفاعل) وباستخدام المصفوفات والجبر الخطي نكتب المصفوفات التي تحوي عدد ذرات كل مركب في التفاعل ، وفي التفاعل السابق لدينا ثلاث أنواع من الذرات (hydrogen , oxygen , carbon) فننشئ لكل المركبات كما يلي :

$$C_3H_8:\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix},O_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},CO_2:\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},H_2O:\begin{array}{c l}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow \text{Carbon}\\ \leftarrow \text{Hydrogen}\\ \leftarrow \text{Oxygen}\end{array}\end{array}$$

لموازنة المعادلة فإن المعاملات x_1, x_2, x_3, x_4 يجب ان تحقق

$$x_1\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

ننقل جميع الحدود الى طرف مع تغيير اشاراتها :

$$x_1\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}-x_3\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}-x_4\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

الحل العام بعد القيام بحل جملة المعادلات الخطية واستخدام التحويلات الأولية :

$x_1=\frac{1}{4}x_4, x_2=\frac{5}{4}x_4, x_3=\frac{3}{4}x_4$ حيث x_4 اختيارية

ولكن المعاملات في المعادلة الكيميائية يجب ان تكون اعداد صحيحة فنأخذ $x_4=4$ بالتالي $x_1=1, x_2=5, x_3=3$ والمعاملات بأصغر ما يمكن فتصبح المعادلة الموزونة بالشكل

$$C_3H_8+5O_2 \rightarrow 3CO_2+4H_2O$$

ثالثاً: في الشبكات الكهربائية In Electrical Networks

نستطيع استخدام المصفوفات في الشبكات الكهربائية والالكترونية بشكل واسع ، ولدراسة هذا التطبيق بشكل مبسط نأخذ المثال التالي ، حيث لدينا في الشكل ادناه شبكة من ثلاث حلقات ، والمطلوب تحديد التيارات المارة خلالها .

الحل :

يكون R1 يمر خلال ثلاث مقاومات ومجموع فروق الجهد I_1 بالنسبة للحلقة 1 التيار

$$4I_1+4I_1+3I_1=11I_1$$

التيار في الحلقة 2 يمر في جزء من الحلقة 1 خلال الفرع القصير بين B و A وفرق الجهد على الفرع المشترك هو $3I_2$ فولط .

على اية حال فأن اتجاه التيار بالفرع AB في الحلقة 1 يعكس ما هو في الحلقة 2 فالمجموع الجبري لفروق الجهد في الحلقة 1 هو $11I_1-3I_2$ وجهد الحلقة 1 هو +30 فولط وحسب قانون كيرشوف لفروقات الجهد ينتج $11I_1-3I_2=30$

ومعادلة الحلقة 2 هي $-3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5$

بحيث $-3I_1$ ناتجة عن مرور التيار في الحلقة 1 عبر الفرع AB (فرق الجهد سالب لان التيار يمر باتجاه معاكس عن جهته في الحلقة 2) و $6I_2$ هي مجموع المقاومات في الحلقة 2 مضروبة بتيار الحلقة ، اما $-I_3$ ناتجة من تيار الحلقة 3 خلال المقاومة 1 ohm في الفرع CD عكس اتجاهه في الحلقة 2 .

ومعادلة الحلقة 3 هي $-I_2 + 3I_3 = -25$

في الحلقة 3 لدينا منبعي جهد فمجموعهما -25 فولط حيث الجهد سالب لان اتجاه التيار في CD ايضاً معاكس

ولحساب تيارات الحلقة نحل جملة المعادلات

$$11I_1 - 3I_2 = 30$$

$$-3I_3 + 6I_2 - I_3 = 5$$

$$-I_2 + 3I_3 = -25$$

ثم نقوم بالتحويلات الأولية على الاسطر للمصفوفة الموسعة التي تقودنا الى الحل $I_1 = 3$ أمبير $I_2 = 1$ أمبير $I_3 = -8$ أمبير ، ولكن القيمة السالبة لـ I_3 تدل على الجهة فقط .

تمارين نهاية الفصل

1- لتكن $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ،

$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ، $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، أحسب :

1- $(AB)^t$ 2- (B^tA^t) 3- $(5AB)$ 4- $(D-E)^t$

5- $(2E-D)$ 6- $(D+3E)^t$ 7- $(\frac{1}{4}C^t - \frac{1}{2}B)$ 8- $A^t(C^tC - BB)$

لاحظ أن : $(AB)^t = B^tA^t$ وأن : $(A \mp B)^t = A^t \mp B^t$ ، كذلك $(rA)^t = rA^t$

2- اي من المعادلات الاتية r.e.f:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A **B** **C** **D**

3- اي من المعادلات الاتية r.r.e.f

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A **B**

4- ضع كل من المصفوفات الآتية على صيغة درجة صفية مختزلة .

1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$