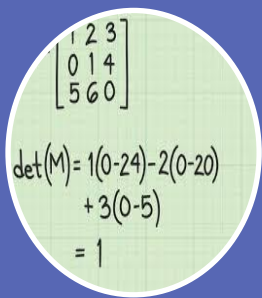
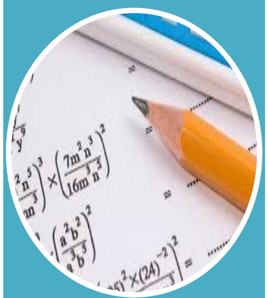
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي/الجامعه المستنصريه
كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء
الدراسات الاوليه/المرحلة الثانية
للعام الدرسي 2020-2021





LINEAR ALGABRI

الجبر الخطي

الاستاذ المساعد الدكتورة

سهاد علي شهيد مجيد

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

المرحلة الثانية (صباحي+مسائي)

2021-2020

القيم والمتجهات المميزة والاستقطار

6- المقدمة

يهتم الجبر الخطي بدراسة التحويلات الخطية، والتي تبين تأثير المصفوفات على المتجهات .تُعد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية احد خواص المصفوفة، ويتم حسابها بطريقة تعطي معلومات عن المصفوفة ويمكن استعمالها في تفكيك المصفوفة .لهذا النوع تطبيقاته الخاصة في مجالات الرياضيات التطبيقية .

وبشكل عام، تؤثر المصفوفة على المتجه بتغيير كلاً من قيمته واتجاهه. لكن يمكن أن تؤثر المصفوفة على بعض المتجهات بتغيير قيمها مع الإبقاء على اتجاهاتها دون تغيير (أو ربما عكسها). يطل على هذه المتجهات متجهات ذاتية للمصفوفة. اذ تؤثر مصفوفة على متجه ذاتي بضرب قيمته بعامل معيّن، والذي يكون موجباً عندما لايتغير اتجاهه وسالباً اذا انعكس الاتجاه، اذ يمثل هذا العامل القيمة الذاتية المصاحبة لذلك المتجه الذاتي. ويكّون الفضاء الذاتي مجموعة كل المتجهات الذاتية التي لها نفس القيمة الذاتية، معاً ومع المتجه الصفري. بصيغة اخرى، إذا كانت A مصفوفة مربعة الشكل (n x n) ، فإن متجهاً لا صفريا مثل x يكون متجها ذاتيا ل A إذا وجد عدد λ حيث

$$AX = \lambda X$$

يسمى العدد λ قيمة ذاتية للمصفوفة A التي تقابل المتجه الذاتي x .

1-6 القيم الذاتية (المميزة) والمتجهات الذاتية (المميزة) : Eigenvalues and eigenvectors

لتكن $A = [a_{ij}]_n$ مصفوفة و $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$ متجه ، نسمي X متجهاً خاصاً او متجهاً ذاتياً واحياناً شعاعاً خاصاً ذاتياً للمصفوفة A اذا وجد عدد مثل λ يحقق الخاصية

$$AX = \lambda X$$

☑**ملاحظة : أن ايجاد القيم والمتجهات الذاتي تحسب وفق :**

- ✓ **ان القيم الذاتية (المميزة) $(\lambda_1, \lambda_2 \dots)$ لهذه المصفوفة تنتج من حل المعادلة $|\lambda I - A| = 0$**

- ✓ ان المتجهات الذاتيــة (المميــزة) $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \dots)$ المنــاظرة للقــيم الذاتيــة $(\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2} \dots)$ تنــتج من حل النظام المتجانس $[\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A}][\mathbf{X}] = \mathbf{0}$.
- ✓ تسمى $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots)$ أساس الفضــاء الــذاتي (المميــز) المنــاظر للقــيم الذاتيــة (المميــزة) للمصفوفة $\mathbf{A}$.

2-6 قابلية المصفوفة A للاستقطار : Capability Matrix A for diagonalization

يقصد بمفهوم الاستقطار (diagonalization) هــو تحويــل المصــفوفة A الــى شــكل المصــفوفة القطرية

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

وذلك بإيجاد : المصفوفة p (المصفوفة التــي اعمــدتها تمثــل المتجهــات الذاتيــة $(e_1, e_2, \dots)$) بحيــث يكون $P^{-1}AP = D$.

مثال (216) : لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$ ، جد ما يلي :

1) عيّن القيم المميزة للمصفوفة A ؟

2) عيّن اساساً لكل فضاء مميز مرافق لكل قيمة مميزة ؟

3) عين " ان امكن" مصفوفة p لها معكوس تحول المصفوفة A الــى الصــيغة القطريــة مــع تعيــين تلــك الصيغة ؟

4) اوجد A^5 ؟

الحل :

1) القيم المميزة للمصفوفة A :

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -12 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 6 - 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \ \rightarrow (\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0$$

$\therefore \ \lambda = 6$ او $\lambda = -1$

2) المتجهات المميزة المناظرة لقيم γ :

نحل النظام المتجانس $(\lambda I - A)X = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -12 & \lambda - 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\lambda = 6]{\text{عند}}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{4} R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -12 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim 12R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1 - \frac{1}{4}X_2 = 0 \ \rightarrow \ X_1 = \frac{1}{4} X_2 \quad \text{Let } X_2 = t$$

$$\therefore S = \left\{\left(\frac{1}{4} t, t\right), t \in R\right\}$$

او يكتب $S = \{(t, 4t), t \in R\}$

فيكون لدينا $e_1 = (1,4)$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -12 & \lambda - 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\lambda = -1]{\text{عند}}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -12 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim -\frac{1}{3} R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -12 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim 12R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1 - \frac{1}{3}\,X_2 = 0 \;\rightarrow X_1 = -\frac{1}{3}X_2 \;\;, \text{Let } X_2 = t$$

$$\therefore\; S = \left\{\left(-\frac{1}{3}t\,,t\right), t \in R\right\}$$

او تكتب $S = \{(-t\,,3t), t \in R\}$

فيكون لدينا $e_2 = (-1,3)$

3) المصفوفة p

$$p = (e_1\; e_2) \;\; \rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3-(-4)}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 42 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D$$

4) لحساب A^5

$$\because\; P^{-1}AP = D \;\rightarrow (\,P^{-1}AP)^5 = D^5$$

$$P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP = D^5$$

$$P^{-1}AAAAAP = D^5 \rightarrow\; P^{-1}A^5P = D^5$$

$$PP^{-1}A^5PP^{-1} = PD^5P^{-1} \;\rightarrow\; A^5 = PD^5P^{-1}$$

$$\therefore\; A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6^5 & 0 \\ 0 & -1^5 \end{bmatrix}\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6^5 & 1 \\ 4(6^5) & -3 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3332 & 1111 \\ 13332 & 4443 \end{bmatrix}$$

<u>مثال (217) :</u> لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، احسب مايلي :

1) عيّن القيم المميزة للمصفوفة A ؟

2) اوجد بعد واساس الفضاءات المميزة للمصفوفة A؟

3) عين مصفوفة p بحيث $P^{-1}A\,p$ تكون مصفوفة قطرية ؟

<u>الحل :</u>

<u>1) القيم المميزة :</u>

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 1)[(\lambda - 2)(\lambda - 1) - 1] - 1[(\lambda - 1) - 0] = 0$$

$$(\lambda - 1)[\lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2 - 1] - (\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)[\lambda^2 - 3\lambda + 1] - (\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)[\lambda^2 - 3\lambda + 1 - 1] = 0$$

$$(\lambda - 1)[\lambda^2 - 3\lambda] = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 0\,, \lambda = 1\,, \lambda = 3$$

<u>2) أساس وبعد الفضاءات المميزة</u>

نحل النظام المتجانس $(\lambda I - A)X = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{at } \lambda = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$X_1 - X_3 = 0 \ \rightarrow X_1 = X_3$

$X_2 - X_3 = 0 \ \rightarrow X_2 = X_3$

$\text{let } X_3 = t \ \ \rightarrow S = \{(t, t, t), t \in R\}$

∴ اساس الفضاء المميز المقابل لقيم $\lambda = 0$ وبعده 1 $e_1 = \{(1,1,1)\}$

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 0 \end{bmatrix} \text{at } \lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$X_1 + X_3 = 0 \ \rightarrow X_1 = -X_3 \quad , X_2 = 0$

$\text{Let } X_3 = t \ \ \rightarrow S = \{(-t, 0, t), t \in R\}$

∴ اساس الفضاء المميز المقابل لقيم $\lambda = 1$ وبعده 1 $e_2 = \{(-1,0,1)\}$

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 0 \end{bmatrix} \text{at } \lambda = 3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\0 & -1 & -2 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$X_1 - X_3 = 0 \ \rightarrow \ X_1 = X_3$

$X_2 + 2X_3 = 0 \ \rightarrow \ X_2 = -2X_3$

Let $X_3 = t \ \ \rightarrow S = \{(t, -2t, t), t \in R\}$

$\therefore$ اساس الفضاء المميز المقابل للقيم $\lambda = 3$ وبعده 1 $e_3 = \{(1, -2, 1)\}$

<u>3) المصفوفة p</u>

$$p = (e_1\ e_2\ e_3) = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & -2\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1} : \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0\\0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 6 & 1 & -2 & 1\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6}\\0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6}\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right] \rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

او $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = D$$

4) احسب A^{10}

$\because P^{-1}AP = D \rightarrow (P^{-1}AP)^{10} = D^{10}$

$P^{-1}A^{10}P = D^{10} \rightarrow PP^{-1}A^{10}PP^{-1} = PD^{10}P^{-1}$

$\therefore A^{10} = PD^{10}P^{-1}$

$$\therefore A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3^{10} \\ 0 & 0 & -2(3^{10}) \\ 0 & 1 & 3^{10} \end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3+3^{10} & -2(3^{10}) & -3+3^{10} \\ -2(3^{10}) & 4(3^{10}) & -2(3^{10}) \\ -3+3^{10} & -2(3^{10}) & 3+3^{10} \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 9842 & -19683 & 9841 \\ -19683 & 39366 & -19683 \\ 9841 & -19683 & 9852 \end{bmatrix}$$

مثال (218) : اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة p بحيث يكون $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية ؟

الحل : نجد اولاً القيم المميزة

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda[(\lambda-2)(\lambda-3) - 0] + 2[0 - (-1)(\lambda-2)] = 0$$

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) + 2(\lambda-2) = 0$$

$$(\lambda-2)[\lambda(\lambda-3) + 2] = 0$$

$$(\lambda-2)[\lambda^2 - 3\lambda + 2] = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2\,, \lambda = 2\,, \lambda = 1$$

بعد ذلك نحل النظام المتجانس $(\lambda I - A)X = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\lambda = 2]{\text{at}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{الاختزال}]{\text{بعد}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$X_1 + X_3 = 0 \rightarrow X_1 = -X_3$$

$$X_2 = s\,, s \in R$$

$$\text{Let } X_3 = t \quad , t \in R$$

$$\therefore S = \{(-t, s, t), t, s \in R\}$$

$$= \{(-t, 0, t) + (0, s, 0)\,, t, s \in R$$

$\therefore$ الاساس المناظر لقيمة $\lambda = 2$

وبُعده 2 اي $e = \{e_1 = (-1,0,1), e_2 = (0,1,0)\}$

$$\xrightarrow[\lambda = 1]{at} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{الاختزال}]{\text{بعد}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 + 2X_3 = 0 \ \rightarrow \ X_1 = -2X_3 \\ X_2 - X_3 = 0 \ \rightarrow \ X_2 = \ X_3 \end{array}\right] \text{Let } X_3 = t \ \ , t \ \in R$$

$\therefore S = \{(-2t\,, t\,, t\,)\,, t \ \in R\}$

$\therefore$ الاساس المناظر لقيم $\lambda = 1$ هو $e_3 = \{(-2,1,1)\}$

نجد الان المصفوفة P

$$P = (e_1 \ e_2 \ e_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبعد العلميات الصفية على $(I|P)$ نحصل على $(I|P^{-1})$ $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= D(\lambda_1, \lambda_2\,, \lambda_3)$$

نستنتج ان، $A^n = PD^nP^{-1}$ وذلك اذا كانت A مصفوفة قابلة للاستقطار و D هي المصفوفة القطرية التي عناصر قطرها هي القيم المميزة للمصفوفة A .

$\because \ P^{-1}AP = D \ \rightarrow \ (P^{-1}AP)^n = D^n \ \ \rightarrow$

$P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP \ldots \ P^{-1}AP = D^n$

$\rightarrow \ P^{-1}A^nP = D^n$

$$\rightarrow PP^{-1}A^nPP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

$$\therefore A^n = PD^nP^{-1}$$

مثال (219) : اثبت ان $1,-1$ هي قيم مميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{bmatrix}$؟

الحل :

نحسب $|\lambda I - A|$ عندما $\lambda = 1$ مرة وعندما $\lambda = -1$ مرة أخرى ، اذا كان في كل مرة $|\lambda I - A| = 0$ فإن $\lambda = 1$ و $\lambda = -1$ قيم مميزة لــ A ، وكالاتي :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-(m+1) & -(m+1) & -1 \\ m & \lambda+m & 1 \\ -m & -(m-1) & \lambda \end{vmatrix}$$

at $\lambda = 1 \rightarrow$

$$\begin{vmatrix} -m & -(m+1) & -1 \\ m & 1+m & 1 \\ -m & 1-m & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{matrix} -R_3+R_2 \\ R_3+R_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} -2m & -2m & 0 \\ 2m & 2m & 0 \\ -m & 1-m & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1[-4m^2 + 4m^2] = 0$$

$\therefore$ $\lambda = 1$ قيمة مميزة للمصفوفة A

وعندما $\lambda = -1$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} 2-m & -m-1 & -1 \\ m & -1+m & 1 \\ -m & -m+1 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{matrix} R_2+R_3 \\ R_2+R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ m & -1+m & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $\lambda = -1$ قيمة مميزة للمصفوفة A

2- أوجد التعدد الجبري لكل من $\lambda = 1$ ، $\lambda = -1$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{vmatrix} \sim R_1 + R_2$$

$$= \begin{vmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{vmatrix} = 1[(m-1) - m]$$

$$= m - 1 - m = -1$$

$\therefore$ عـــدد القـــيم المميـــزة للمصـــفوفة 3×3 يكـــون 3 مختلفـــات او بعضـــها او كلهـــا مكـــرر ويكـــون المحدد = حاصل ضربها

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$$

$$(1)(-1)\lambda_3 = -1 \;\rightarrow\; \lambda_3 = 1$$

وعلى ذلك التعدد الجبري للقيمة $\lambda = 1$ هو 2

والتعدد الجبري للقيمة $\lambda = -1$ هو 1 .

3 – اوجد E_1 أي المقابل للقيمة $\lambda = 1$

عندما $\lambda = 1$ فإن النظام $[\lambda I - A|0]$ يكون

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -m & -m-1 & -1 & 0 \\ m & 1+m & 1 & 0 \\ -m & 1-m & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -m & -m-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -m & -m-1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim (1+m)R_2 + R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} -m & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X_2 + X_3 = 0 \;\rightarrow\; X_2 = -X_3$$

لنفرض $X_3 = t$ حيث $t \in R$

$$X_2 = -t \;\; , X_3 = t$$

$$-mX_1 + mX_3 = 0$$

$$-m(X_1 - X_3) = 0$$

اما $X_1 - X_3 = 0$ وهذا يؤدي ان $X_1 = X_3 = t$ اي $X_1 = t$

ويكون لدينا $E_1 = (1, -1, 1)$

والتعدد الجبري للقيمة $\lambda = 1$ هو 2 وعليه تكون A غير قابلة للاستقطار

او $-m = 0$ اي $m = 0$ وعندها

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$X_2 = -X_3 \quad , X_2 = -t$

$X_1 = s \;\; \rightarrow \; E_1 = \{(s, -t, t)\}$

$E_1 = \{(0, -1,1), (1,0,0)\}$

$\lambda = 1$ تعددها الجبري 2 لكي تكون A قابلة للاستقطار

عندما $m = 0$ اوجدنا

$e_1 = (0, -1,1) \;\; , e_2 = (1,0,0)$

نجد e_3 المقابل $\lambda = -1$

$[\lambda I - A|0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad \lambda = -1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$X_1 + X_3 = 0$

$X_2 - X_3 = 0$

$\therefore e_3 = (-1,1,1)$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

4- (b) جد A^{1437}

$\because\ P^{-1}AP = D \ \rightarrow \cdots\ A^{1437} = PD^{1437}P^{-1}$

$$A^{1437} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{1437} & 0 & 0\\ 0 & 1^{1437} & 0\\ 0 & 0 & -1^{1437}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$A^{1437} = A$ بعد الحساب ظهرت صدفة

$A^{1438} = I$ وبالصدفة