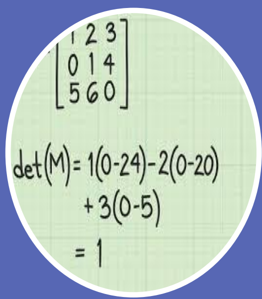
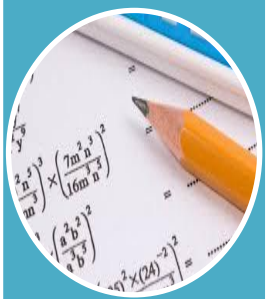
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي/الجامعه المستنصريه

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

الدراسات الاوليه/المرحلة الثانية

للعام الدرسي 2020-2021





LINEAR ALGABRI

الاستاذ المساعد الدكتورة

سهاد علي شهيد مجيد

الجبر الخطي

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

المرحلة الثانية (صباحي+مسائي)

2021-2020

فضاء المتجهات: (Vectors Spaces)

4- المقدمة :

يقال عن نظام (V) انهُ فضاء متجهات (Vectors Spaces) على مجموعة الاعداد الحقيقية (R) ، إذا كان مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين احداهما عملية الجمع والاخرى عملية الضرب بعدد حقيقي بحيث تحقق هاتين العمليتين الخواص التالية:

1) **خاصية الاغلاق لعملية الجمع:** إذا كان كل من $u, v \in V$ فإن $u + v \in V$
2) **الخاصية التجميعية للجمع:** $u + (v + w) = (u + v) + w$ لكل $u, v, w \in V$
3) **خاصية المحايد الجمعي:** يوجد عنصر $0 \in V$ (يسمى المحايد الجمعي) بحيث يكون $v + 0 = 0 + v = v$ لكل $v \in V$
4) لكل $v \in V$ يوجد عنصر يرمز لهُ بالرمز $-v$ ويسمى نظير v الجمعي بحيث يكون
5) **الخاصية الإبدالية للجمع:** $u + v = v + u$ لكل $u, v \in V$
6) **خاصة الإغلاق لعملية الضرب بعدد :** إذا كان $v \in V$ وكان $\alpha \in R$ فإن $\alpha v \in V$
7) $\boldsymbol{\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v}$ لكل $u, v \in V$ ولكل $\alpha \in R$
8) $\boldsymbol{(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v}$ لكل $v \in V$ ولكل $\alpha, \beta \in R$
9) $\boldsymbol{(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)}$ لكل $v \in V$ ولكل $\alpha, \beta \in R$
10) $\mathbf{I * v = v}$ لكل $v \in V$.

☑**ملاحظة : يطلق على كل عنصر من عناصر V متجه.**

مثال (92) : إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء متجهات ، فأثبت ان $K0 = 0$ ، وذلك لكل عدد حقيقي K حيث ان $\mathbf{V}$ فضاء متجهات فأنهُ يحقق الخواص العشرة ومنها ان 0 عنصر محايد جمعي.

الحل:

- نفرض ان $v \in V$ فإن $0 + v \in V$ (لان 0 عنصر محايد جمعي)
- نفرض ان $K \in R$ فإن $K(0 + v) = Kv$

$K0 + Kv = Kv$ (توزيع الضرب بعدد على الجمع)

$K0 + 0 = 0$ (لان العنصر + نظيره الجمعي = صفر)

$K0 = 0$ (الصفر محايد جمعي)

4-1 الفضاءات الجزئية : Partial Spaces

نقول أن W فضاء جزئي من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ إذا كان:

1) المتجه الصفري ينتمي الى W ، اي ان $0 \in W$ ، او بشكل اخر W غير خالية $W \neq \emptyset$.

2) إذا كان $u, v \in W$ ، فإن : $(u + v) \in W$ (الاغلاق الجمعي).

3) إذا كان $v \in W$ و $\alpha \in R$ فإن : $(\alpha v) \in W$ (الاغلاق الضربي بعدد).

مثال(93): إذا كانت $W = \{(a, b, c) \in R^3 : a - b + 2c = 0\}$ ، فأثبت ان W فضاء جزئي من R^3.

الحل:

1 - $(0,0,0) \in W$ لان $0 - 0 + 2(0) = 0$

2 - نفرض ان $(a_1, b_1, c_1) \in W$ اي ان $a_1 - b_1 + 2c_1 = 0$

ونفرض ان $(a_2, b_2, c_2) \in W$ اي ان $a_2 - b_2 + 2c_2 = 0$

يجب اثبات ان $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) \in W$

$$\big((a_1 + a_2), (b_1 + b_2), (c_1 + c_2)\big) \in W$$

اي يجب اثبات ان $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + 2(c_1 + c_2) = 0$

البرهان:

$$\text{الطرف الايسر} = a_1 + a_2 - b_1 - b_2 + 2c_1 + 2c_2$$
$$= \underbrace{a_1 - b_1 + 2c_1} + \underbrace{a_2 - b_2 + 2c_2}$$
$$= \underbrace{0}_{\text{بالفرض}} + \underbrace{0}_{\text{بالفرض}} = 0 \quad \text{الطرف الايمن}$$

3 - نفرض ان $(a_1, b_1, c_1) \in W$ اي ان $a_1 - b_1 + 2c_1 = 0$

ونفرض ان $\alpha \in IR$

يجب اثبات ان $\alpha(a_1, b_1, c_1) \in W$ اي $(\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha c_1) \in W$

اي يجب اثبات ان $\alpha a_1 - \alpha b_1 + 2\alpha c_1 = 0$

البرهان:

الطرف الايسر $\alpha\underbrace{(a_1 - b_1 + 2c_1)}$

$= \underbrace{\alpha\ 0}_{\text{بالفرض}} = 0$ الطرف الايمن

من (1) و (2) و (3) $\quad \therefore$ W فضاء جزئي من R^3

مثال (94): إذا كانت $W = \{A \in M_{n\times n} : A = A^t\}$ ، فأثبت ان W فضاء جزئي من $M_{n\times n}$.

1- المصفوفة الصفرية تنتمي الى W ، $0 \in W$ لان $0 = 0^t$ ، $\therefore W \neq \emptyset$

2- نفرض ان $A_1 \in W$ اي ان $A_1 = {A_1}^t$

ونفرض ان $A_2 \in W$ اي ان $A_2 = {A_2}^t$

يجب اثبات ان $(A_1 + A_2) \in W$

اي يجب اثبات $(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)^t$

$(A_1 + A_2)^t = {A_1}^t + {A_2}^t = A_1 + A_2$

3- نفرض ان $A_1 \in W$ اي ان $A_1 = {A_1}^t$ ، ونفرض ان $\alpha \in R$

يجب اثبات ان $(\alpha A_1) \in W$

اي يجب اثبات ان $\alpha A_1 = (\alpha A_1)^t$ اي

$(\alpha A_1)^t = \alpha {A_1}^t = \alpha A_1$

من (1) و (2) و (3) $\quad \therefore$ W فضاء جزئي من $M_{n\times n}$

مثال(95): إذا كانت $W = \{aX^2 + bX + c \in P_2(X): a + b + c = 0\}$ ، فأثبت ان W فضاء جزئي من $P_2(X)$.

الحل:

1- كثيرة الحدود $0X^2 + 0X + 0 \in W$ لان $0 + 0 + 0 = 0$ ، $\therefore W \neq \emptyset$

2- نفرض ان $(a_1X^2 + b_1X + c_1) \in W$ اي ان $a_1 + b_1 + c_1 = 0$

ونفرض ان $(a_2X^2 + b_2X + c_2) \in W$ اي ان $a_2 + b_2 + c_2 = 0$

يجب اثبات ان $(a_1X^2 + b_1X + c_1) + (a_2X^2 + b_2X + c_2) \in W$

$(a_1 + a_2)X^2 + (b_1 + b_2)X + (c_1 + c_2) \in W$

اي يجب اثبات $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = 0$

البرهان:

الطرف الايسر $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2$

$$= \underbrace{a_1 - b_1 + 2c_1} + \underbrace{a_2 - b_2 + 2c_2}$$

$$= \underbrace{0}_{\text{بالفرض}} + \underbrace{0}_{\text{بالفرض}} = 0$$ الطرف الايمن

3 نفرض ان $(a_1X^2 + b_1X + c_1) \in W$ اي ان $a_1 + b_1 + c_1 = 0$

ونفرض ان $\alpha \in IR$

يجب اثبات ان $\alpha(a_1X^2 + b_1X + c_1) \in W$

$(\alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1) \in W$

اي يجب اثبات ان

$\alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1 = 0$

البرهان:

الطرف الايسر $\alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1$

$$= \alpha(a_1 - b_1 + 2c_1)$$

$$= \underbrace{\alpha\ 0}_{\text{بالفرض}} = 0$$ الطرف الايمن

من (1) و (2) و (3) $\therefore$ W فضاء جزئي من $P_2(X)$

مثال(96): اثبت ان W لا تمثل فضاء جزئي من R^3 ، حيث ان

$$W = \{(a,b) \in R^2 : a + 2b = 4\}$$

الحل:

1- حيث ان $(0,0) \notin W$ لان $0 + 2(0) \neq 4$

$\therefore$ W ليست فضاء جزئي من R^2.

السبب : إذا كان $(a_1, b_1) \in W$ فإن $a_1 + 2b_1 = 4$

وإذا كان $(a_2, b_2) \in W$ فإن $a_2 + 2b_2 = 4$

لكن $(a_1 + 2b_1) + (a_2 + 2b_2) = 8 \neq 4$

$\therefore [(a_1 + 2b_1) + (a_2 + 2b_2)] \notin W$

4-5 الاستقلال والارتباط الخطي : Independence and linear correlation

اولاً: نقول لمجموعة المتجهات ... $v_1, v_2,$ التي تنتمي الى فضاء المتجهات V انها ان مستقلة خطياً اذا كان حل النظام المتجانس حل صفري (تافه) فقط اذا كان $\cdots + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ أي $|A| \neq 0$ واذا كانت مصفوفة المتجهات [... $v_1\ v_2$] مربعة .

ثانياً: نقول لمجموعة المتجهات ... $v_1, v_2,$ التي تنتمي الى فضاء المتجهات V انها مرتبطة خطياً اذا كان للنظام المتجانس حل غير صفري $\cdots + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ أي $|A| = 0$ واذا كانت مصفوفة المتجهات [... $v_1\ v_2$] مربعة .

مثال (119) : بين هل $v_1 = (1,2,4), v_2 = (2,1,3), v_3 = (4,-1,1)$ مستقلة ام مرتبطة خطياً في فضاء المتجهات IR^3 ؟

الحل:

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0$$
$$\alpha_1(1,2,4) + \alpha_2(2,1,3) + \alpha_3(4,-1,1) = (0, 0, 0)$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix} = (1 - 8 + 24) - (4 - 3 + 16) = 0$$

$\therefore$ للنظام المتجــانس $A\alpha = 0$ عــدد لا نهــائي مــن الحلــول غيــر الصــفرية $\therefore$ المتجهــات v_1, v_2, v_3 مرتبطة في الفضاء IR^3 .

او طريقة اخرة لحل النظام المتجانس وذلك وفق طريقة الاختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{الاختزال}]{\text{بعد}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل $\therefore$ للنظام عدد لا نهائي مــن الحلــول غيــر الصــفرية وعليــه فــإن v_1, v_2, v_3 مرتبطة خطياً في الفضاء R^3 .

<u>مثـــال (120) :</u> بـــين هـــل المتجهـــات $V_1 = x^2 + x + 1 \, , V_2 = x + 1 \, , V_3 = 1$ مســـتقلة فـــي الفضاء $P_2(x)$ ام مرتبطة ؟

<u>الحل :</u>

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0$$
$$0x^2 + 0x + 0 = \alpha_1(x^2 + x + 1) + \alpha_2(x + 1) + \alpha_3(1)$$
$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\therefore$ للنظام المتجانس حل صفري تافه فقط وعليه فإن v_1, v_2, v_3 مستقلة خطياً في الفضاء $P_2(x)$.

او نحل النظام المتجانس

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{الاختزال}]{\text{بعد}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

للنظام حل صفري تافه فقط $\therefore$ المتجهات v_1, v_2, v_3 مستقلة خطياً في فضاء المتجهات $P_2(x)$.

☑**<u>ملاحظـــة :</u> ان المصـــفوفة $[\, v_1 \; v_2 \; \dots \,]$ اذا كانـــت $m < n$ ففـــي النظـــام المتجـــانس يكـــون هنـــاك عدد لا نهائي من الحلول غير الصـــفرية وعليـــه دائمـــاً اذا كانـــت $m < n$ فـــإن المتجهـــات v_1, v_2, v_3 مرتبطة خطياً .**

مثـــــــــــال (121) : بيـــــــــــــن مـــــــــــــا اذا كانــــــــــــــت
$S = \{(7,-9,6,0),(5,-4,3,2),(11,13,7,-3),(2,5,17,-18),(1,0,0,0)\}$

التي تنتمي للفضاء R^4 مستقلة ام مرتبطة خطياً في الفضاء R^4 ؟

الحل :

ان مصفوفة المتجهات هي $[v_1\ v_2\ \dots]$ وان :

$m = 4 =$ مركبات كل متجه

$n = 5 =$ عدد المتجهات

$\therefore m < n$ المتجهات S مرتبطة خطياً .

مثال (122) : بين ما اذا كان $S = \{(1,2,3),(2,-1,5)\}$ مرتبط ام مستقلة في الفضاء R^3 ؟

الحل : يلاحظ ان

$m > n$ لا نستطيع الحل بالمحدد ولكن بالاختزال

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{الاختزال}]{\text{بعد}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

للنظام حل صفري فقط $\therefore$ v_1, v_2 عندها المتجهات مستقلة في الفضاء IR^3

مثال (123) : بين مـــا اذا كـــان $S = \{(1,2,3),(2,4,6)\} \subseteq IR^3$ مرتبطـــة ام مســـتقلة فـــي الفضـــاء R^3 ؟

الحل : يلاحظ ان :

$m > n$ بالتالي يتم الحل بالاختزال

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{الاختزال}]{\text{بعد}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

للنظام عدد لا نهائي من الحلول غير الصفرية $\therefore$ v_1, v_2 مرتبطة خطياً في الفضاء R^3.

مثـــال (124) : عـــيّن قيمـــة الثابـــت γ التـــي تجعـــل المجموعـــة $S =$ $\{x+3\ ,2x+(\gamma^2+2)\} \subseteq P_1(x)$ مستقلة خطياً في فضاء المتجهات $P_1(x)$ ؟

الحل :

بما ان $[v_1\ v_2]$ مربعة فيمكن الحل بالمحـــدد ، لكـــي تكـــون مســـتقلة يجـــب $|A| \neq 0$ (حـــل صـــفري فقط)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \gamma^2+2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\gamma^2 + 2 - 6 \neq 0 \rightarrow \gamma^2 \neq 4 \rightarrow \gamma \neq \pm 2$$

$\gamma \in R - \{\pm 2\}$ تجعل S مستقلة خطياً .

<u>مثـــــال (125) :</u> عـــــين قيمـــــة الثابـــــت γ التـــــي تجعـــــل المجموعـــــة $S = \{(1,-1,2,1),(2,1,-1,3),(1,2,-3,\gamma)\} \subseteq R^4$ ، مســـــتقلة خطيـــــاً فـــــي فضـــــاء المتجهات R^4؟

<u>الحل :</u>

بما ان $[v_1, v_2, v_3]$غير مربعة ، $m > n$ لا بد من حل النظام المتجانس بالاختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & \gamma & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{الاختزال}]{\text{بعد}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$(\gamma - 2)\alpha_3 = 0$ حتى تكون مستقلة

$\alpha_3 = 0$ (حـــل صـــفري فقـــط) لـــذا يجـــب ان تكـــون $(\gamma - 2) \neq 0$ وعليـــه $\gamma \neq 2$ التـــي تجعـــل المجموعة مستقلة .

<u>مثال (126) :</u> اعد حل المثال (34) السابق حتى تكون S مرتبطة ؟

<u>الحل :</u>

$(\gamma - 2)\alpha_3 = 0$ حتى تكون مرتبطة $\alpha_3 \neq 0$

أي نفرضها $t \in R$ (عدد لا نهائي من الحلول غير الصفرية)

وعليه $\gamma - 2 = 0$ أي $\gamma = 2$ تجعل S مرتبطة .

<u>مثال (127) :</u> عين قيمة γ التي تجعل المجموعة مستقلة خطياً في الفضاء R^3؟

$S = \{(2,3,-1),(\gamma,2,-1),(3,-1,2),(-1,0,0)\} \subseteq R^3$

<u>الحل :</u>

$\because m < n$ أي ان S دائماً مرتبطة

وعليه $\gamma = \emptyset$ وتجعل المجموعة مستقلة .

مثال (129) : ما هي الشروط المفروضة على x, y, z والتي تجعل المجموعة مرتبطة خطياً في الفضاء R^3 ؟

$$S = \{(x, y, z), (1,1,0), (0,1,-1)\} \sqsubseteq R^3$$

الحل :

$\because m = n$ يمكن الحل بالمحدد وحتى تكون مرتبطة يجب $[v_1\ v_2 v_3\ ] = 0$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 1 \\ y & 1 \\ z & 0 \end{matrix} = (-x + z) - (-y) = 0$$

$$-x + z + y = 0$$

لكي تكون المجموعة مرتبطة خطياً في R^3 فالشروط هي $-x + z + y = 0$ او تكتب $z = x - y$

☑ **ملاحظة : مما سبق نستنتج ان مصفوفة المتجهات $[\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \dots\ ]$ اذا كانت :**

1- $m = n$ نحل بالمحددات فإذا كان مستقلة $\rightarrow$ $\boxed{|\mathbf{A}| \neq \mathbf{0}}$ ومرتبطة $\rightarrow$ $\boxed{|\mathbf{A}| = \mathbf{0}}$

2- $m < n$ دائماً مرتبطة اذ ان للنظام دائماً عدد لانهائي من الحلول .

3- $m > n$ نضع V متجه صفري ونحل النظام المتجانس (حل صفري فقط – مستقلة) ، اي (عدد لا نهائي من الحلول غير الصفرية – مرتبطة) .

مثال (130) : اذا كانت $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ مستقلة خطياً في فضاء المتجهات V فبين هل المجموعة $S = \{u_1 - u_2, u_1 - u_3, u_2 - u_3\}$ مستقلة ام مرتبطة في الفضاء V ؟

الحل :

$\because$ B مستقلة في الفضاء V ، $\therefore$ للنظام المتجانس $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ حل صفري فقط ، أي

$$\alpha_1 = 0\, , \alpha_2 = 0\, , \alpha_3 = 0$$

المجموعة S هي :

$$\gamma_1(u_1 - u_2) + \gamma_2(u_1 - u_3) + \gamma_3(u_2 - u_3) = 0$$
$$\gamma_1 u_1 - \gamma_1 u_2 + \gamma_2 u_1 - \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_2 - \gamma_3 u_3 = 0$$
$$\therefore\ \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha_1 = 0$$

$-\gamma_1 + \gamma_3 = \alpha_2 = 0$
$-\gamma_2 - \gamma_3 = \alpha_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1[0+1] - 1[1-0] = 0$$

اذن للنظام $A\gamma = 0$ عدد لانهائي من الحلول غير الصفرية بالتالي S مجموعة مرتبطة.

<u>طريقة حل اخرى:</u> بما ان

$S = \{u_1 - u_2, u_1 - u_3, u_2 - u_3\}$

$$\begin{array}{l} \\ u_1 \text{ معامل} \rightarrow \\ u_2 \text{ معامل} \rightarrow \\ u_3 \text{ معامل} \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

اذن S مجموعة مرتبطة.

<u>مثـــال (131) :</u> اذا كانــت $B = \{u, v, w\}$ مســتقلة خطيــاً فــي فضــاء المتجهــات V فبــين هــل $S = \{u , u + v , u + v + w\}$ مستقلة ام مرتبطة في الفضاء V .

<u>الحل :</u> بما ان للنظام $\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = 0$ حل صفري فقط لان B مستقلة أي $\alpha_1 = 0 , \alpha_2 = 0 , \alpha_3 = 0$

الان نبحث عن S

$\gamma_1 u + \gamma_2(u + v) + \gamma_3(u + v + w) = 0$
$\gamma_1 u + \gamma_2 u + \gamma_2 v + \gamma_3 u + \gamma_3 v + \gamma_3 w = 0$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha_1 = 0$
$\gamma_2 + \gamma_3 = \alpha_2 = 0$
$\gamma_3 = \alpha_3 = 0$

بالتعويض الخلفي $\gamma_3 = 0$

$\therefore\ \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \rightarrow \gamma_2 = 0$
$\therefore\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \rightarrow \gamma_1 = 0$

$\therefore$ للنظام حل صفري فقط $\therefore$ S مستقلة .

<u>الحل بطريقة اخرى:</u>

$$\begin{array}{r} \text{معامل } u \\ \\ \text{معامل } v \\ \\ \text{معامل } w \end{array}\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\therefore$ S مستقلة .

<u>مثال (132) :</u> اذا كان V فضاء متجهات وكان $S \subseteq V$ حيث $S = \{v_1, v, \ldots, v_n\}$ حيث $n \geq 2$ فأثبت ان S تكون مرتبطة خطياً اذا وفقط اذا كان احد متجهاتها تركيب خطي لباقي المتجهات ؟

<u>الحل :</u> نفرض ان S تركيب خطي أي للنظام $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ عدد لا نهائي من الحلول غير الصفرية أي واحدة فقط على الأقل من $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ، ولتكن α_3 تحسب :

$$-\alpha_3 v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$
$$v_3 = \frac{\alpha_1}{-\alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{-\alpha_3} v_2$$

$\therefore$ v_3 تركيب خطي لــــــ v_1, v_2 ، حيث ان $\frac{\alpha_1}{-\alpha_3}, \frac{\alpha_2}{-\alpha_3}$ قيم حقيقية تنتمي الى R

لتكن فرضاً v_3 تركيب خطي لــــــ v_1, v_2

أي $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ و $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ بالتالي

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 - v_3 = 0$$

وهي مرتبطة خطياً اي ان النظام له عدد لا نهائي من الحلول غير الصفرية لان واحدة على الأقل $\alpha_3 = -1$ لا تساوي صفر .

<u>مثال (133) :</u> اذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n بحيث ان $A^2 \neq 0$ و $A^3 = 0$ ، فأثبت ان المجموعة $\{I, A, A^2\} \subseteq M_{n\times n}$ مستقلة خطياً في فضاء المتجهات $M_{n\times n}$ ؟

<u>الحل :</u> حتى تكون المجموعة مستقلة يجب $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ (حل صفري فقط) ، اي

$$\alpha_1 I + \alpha_2 A + \alpha_3 A^2 = 0 \qquad \to (1)$$

يضرب طرفي المعادلة (1) في A

$$\alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = 0$$
$\because A^3 = 0$ بالفرض
$$\alpha_1 A + \alpha_2 A^2 = 0 \qquad \to (2)$$

يضرب طرفي المعادلة (2) في A

$\alpha_1 A^2 + \alpha_2 A^3 = 0 \quad , \because A^3 = 0$ معطى

اذ ان $A^2 \neq 0$ بالفرض

$\therefore \alpha_1 A^2 = 0 \qquad \rightarrow (3)$

$\therefore \alpha_1 = 0$

بالتعويض في معادلة (2)

$0 + \alpha_2 A^2 = 0$

اذ ان $A^2 \neq 0$ بالفرض

$\alpha_2 A^2 = 0$

$\therefore \alpha_2 = 0$

بالتعويض في معادلة (1)

$0 + 0 + \alpha_3 A^2 = 0$

$0 = \alpha_3 A^2$

وحيث ان $A^2 \neq 0$ بالفرض

$\therefore \alpha_3 = 0$

$\therefore$ للنظام حل صفري فقط $\therefore$ المجموعة مستقلة .

☑**ملاحظة : مما سبق نستخلص الاتي : مفهوم التركيب ، التوليد ، الاستقلال والارتباط** هو :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots = \begin{cases} V & \text{المتجه المعطى (تركيب)} \\ V & \text{المتجه عام (توليد)} \\ 0 & \text{(في حالة الاستقلال والارتباط)} \end{cases}$$

اذا كانت مصفوفة المتجهات

1- $\boxed{m < n}$ (اختزال) (متسق – تركيب واذا كان غير متسق ليس تركيب) ، (متسق بلا شروط – تولد واذا كان متسق بشروط لا تولد) ، (دائماً مرتبطة بدون اختزال (نظرية)) .

2- $\boxed{m > n}$ (اختزال) (متسق – تركيب واذا كان غير متسق ليس تركيب) ، دائماً لا تولد ، (بالاختزال حل مشروط فإذا كان حل صفري مستقلة – حل غير صفري مرتبطة).

3- $\boxed{m = n}$ نحل بالمحددات فإذا كان $|A| \neq 0 \rightarrow$ تولد ,مستقلة ,تركيب و $|A| = 0$ لا ندري تركيب ام لا (اختزال) ، لا تولد ، مرتبطة .