المحاضرة 7 / المتتابعة The Sequence

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2021

1. المتتابعة The Sequence

هي مجموعة من الاعداد تتبع نمطاً معيناً بحيث كل عدد من هذه الاعداد يرتبط بالعدد الذي قبله والعدد الذي بعده كما ان ترتيب كل عدد داخل المتتابعة يسمى رقم الحد، المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة (مجموعة الاعداد الطبيعية) (N) ومداها مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية (R)، يستخدم الرمز $\{f(n)\}$ للتعبير عن المتتابعة كما يمكن كتابة المتتابعة وفق الشكل

$$\{f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots, f_n\}$$

f_1:يمثل الحد الاول للمتتابعة

f_2: يمثل الحد الثاني للمتتابعة

f_3: يمثل الحد الثالث للمتتابعة

f_n: يمثل الحد النوني او الحد العام للمتتابعة

2. انواع المتتابعات

أ- المتتابعة المنتهية Finite Sequence

هي المتتابعة التي يعبر عن عدد حدودها بالرمز n ويكون مجال الدالة هو $\{1, 2, 3, \cdots\cdots n\}$ ومجالها المقابل هو مجموعة الاعداد الحقيقية (R) ويمكن الرمز للمتتابعة غير المنتهية بالرمز $\{\ f(n)\ \}_{n=1}^{k}$ من امثلة المتتابعة المنتهية:

$$\{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$$

ب- المتتابعة غير المنتهية Infinite Sequence

هي الدالة التي مجالها مجموعة الاعداد الطبيعية (N) ومجالها المقابل يكون مجموعة الاعداد الحقيقية (R) ويمكن الرمز للمتتابعة غير المنتهية بالرمز $\{\ f(n)\ \}_{n=1}^{\infty}$ ومن امثلة المتتابعة غير المنتهية:

$$\{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,\cdots\cdots\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{3}\ ,\frac{1}{4}\ ,\cdots\cdots\right\}$$

مثال (1) اوجد الحد النوني لحدود المتتابعة التالية

$$\{f(n)\} = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\cdots\right\}$$

$$n = 1 \rightarrow\ (1,1)$$

$$n = 2 \rightarrow\ \left(2,\tfrac{1}{2}\right)$$

$$n = 3 \rightarrow\ \left(3,\tfrac{1}{3}\right)$$

$$n = n \rightarrow\ \left(n,\tfrac{1}{n}\right)$$

اذن الحد النوني للمتتابعة اعلاه هو $\frac{1}{n}$.

مثال (2) اوجد حدود المتتابعة التالية

$$f(n) = \frac{2n}{n+5} \qquad\qquad \forall\ n \in N$$

نحصل على الحد الاول للمتتابعة من خلال تعويض العدد (1) في الحد النوني للمتتابعة اعلاه

$$n = 1 \rightarrow \frac{2n}{n+5} = \frac{2(1)}{1+5} = \frac{2}{6}$$

نحصل على الحد الثاني للمتتابعة من خلال تعويض العدد (2) في الحد النوني للمتتابعة اعلاه

$$\frac{2n}{n+5} = \frac{2(2)}{2+5} = \frac{4}{7}$$

نحصل على الحد الثالث للمتتابعة من خلال تعويض العدد (3) في الحد النوني للمتتابعة اعلاه

$$\frac{2n}{n+5} = \frac{2(3)}{3+5} = \frac{6}{8}$$

اذن يمكن كتابة المتتابعة بالشكل

$$\{f(n)\} = \left\{\frac{2}{6}, \frac{4}{7}, \frac{6}{8}, \cdots\cdots, \frac{2n}{n+5}\right\}$$

كما يمكن كتابة صورة العدد للمتتابعة

$$n = 1 \rightarrow \left(1, \tfrac{2}{6}\right)$$

$$n = 2 \rightarrow \left(2, \tfrac{4}{7}\right)$$

$$n = 3 \rightarrow \left(3, \tfrac{6}{8}\right)$$

$$n = n \rightarrow \left(n, \tfrac{2n}{n+5}\right)$$

مثال (3) اذا كانت لدينا المتتابعة التالية اوجد الحد النوني لها

$$\{\boldsymbol{f(n)}\} = \{\sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\mathbf{10}}, \sqrt{\mathbf{29}}, \cdots\cdots\}$$

$$n = 1 \rightarrow \sqrt{\mathbf{1^3 + 2}} = \sqrt{\mathbf{3}} \rightarrow (1, \sqrt{\mathbf{3}})$$

$$n = 2 \rightarrow \sqrt{\mathbf{2^3 + 2}} = \sqrt{\mathbf{10}} \rightarrow (2, \sqrt{\mathbf{10}})$$

$$n = 3 \rightarrow \sqrt{\mathbf{3^3 + 2}} = \sqrt{\mathbf{29}} \rightarrow (3, \sqrt{\mathbf{29}})$$

$$n = n \rightarrow \left(n, \sqrt{n^3 + \mathbf{2}}\right)$$

اذن الحد النوني للمتتابعة هو $\boldsymbol{f(n) = \sqrt{n^3 + 2}}$.

مثال (4) اوجد حدود المتتابعة $\boldsymbol{\forall\, n \geq 2}$ $\boldsymbol{f_{n+1} = \frac{1}{3}(f_n - f_{n-1})}$ كما ان $\boldsymbol{f_1 = 5, f_2 = 7}$.

الحل:

$$f_1 = 5$$

$$f_2 = 7$$

$$f_{n+1} = \frac{1}{3}(f_n - f_{n-1})$$

$$n = 2 \rightarrow f_{2+1} = f_3 = \frac{1}{3}(f_2 - f_1) = \frac{1}{3}(7-5) = \frac{2}{3}$$

$$n = 3 \rightarrow f_{3+1} = f_4 = \frac{1}{3}(f_3 - f_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} - 7\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2-21}{3}\right) = \frac{-19}{9}$$

$$n = 4 \rightarrow f_{4+1} = f_5 = \frac{1}{3}(f_4 - f_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{-19}{9} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{-19-6}{9}\right)$$
$$= \frac{-25}{27}$$

اذن حدود المتتابعة هي

$$\{f(n)\} = \left\{5\,, 7\,, \frac{2}{3}\,, \frac{-19}{9}\,, \frac{-25}{27} \cdots\cdots\right\}$$

مثال (5) اكتب الحدود الخمسة الاولى للمتتابعة التالية

$$\left\{ \frac{n+1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$n = 1 \rightarrow f_1 = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1+1}{(1)^2} = 2$$

$$n = 2 \rightarrow f_2 = \frac{n+1}{n^2} = \frac{2+1}{(2)^2} = \frac{3}{4}$$

$$n = 3 \rightarrow f_3 = \frac{n+1}{n^2} = \frac{3+1}{(3)^2} = \frac{4}{9}$$

$$n = 4 \rightarrow f_4 = \frac{n+1}{n^2} = \frac{4+1}{(4)^2} = \frac{5}{16}$$

$$n = 5 \rightarrow f_5 = \frac{n+1}{n^2} = \frac{5+1}{(5)^2} = \frac{6}{25}$$

$$\left\{ \frac{n+1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2\,, \frac{3}{4}\,, \frac{4}{9}\,, \frac{5}{16}\,, \frac{6}{25}\right\}$$

3. تقارب وتباعد المتتابعات

تسمى المتتابعة $\{f(n)\}$ متقاربة (convergent) من العدد الحقيقي L اذا كانت المتتابعة تمتلك غاية (اي غاية المتتابعة موجودة) $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$ أما اذا كانت المتتابعة لا تمتلك غاية يقال ان المتتابعة متباعدة (divergent).

مثال (5) بين هل ان المتتابعة $f(n) = \frac{n}{n+4}$ متقاربة ام متباعدة

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+4} = \frac{\infty}{\infty+4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{4}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{n}} = \frac{1}{1+\frac{4}{\infty}} = 1$$

بما ان غاية المتتابعة موجودة اذن المتتابعة متقاربة convergent تقترب من القيمة 1 .

مثال (6) اثبت ان المتتابعة $f(n) = \frac{n^2+1}{2n^2+5}$ تقترب من $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5} = \frac{(\infty)^2+1}{2(\infty)^2+5} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{2\frac{n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{(\infty)^2}}{2+\frac{5}{(\infty)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

بما ان غاية المتتابعة موجودة اذن المتتابعة متقاربة convergent الى القيمة $\frac{1}{2}$.

مثال (7) هل ان المتتابعة $\{1 + (-1)^n\}$ متقاربة؟

نستخرج حدود المتتابعة

$$n = 1 \ \rightarrow f_1 = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{1} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{1}} + \mathbf{1} = 0$$

$$n = 2 \ \rightarrow f_2 = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{1} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} + \mathbf{1} = 2$$

$$n = 3 \ \rightarrow f_3 = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{1} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{3}} + \mathbf{1} = 0$$

$$n = 4 \ \rightarrow f_4 = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{1} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{4}} + \mathbf{1} = 2$$

اذن حدود المتتابعة هي

$$\{0, 2, 0, 2, \cdots\cdots\}$$

اذن يمكن كتابة حدود المتتابعة وفق الشكل

$$f(n) = \begin{cases} 0 & if \quad n \ is \ odd \\ 2 & if \quad n \ is \ even \end{cases}$$

نحسب الغاية $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}$$

بما انه توجد قيمتان مختلفة لغاية المتتابعة اذن المتتابعة متباعدة.

مثال (8) اثبت ان المتتابعة $\boldsymbol{f(n)} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n} - \mathbf{3}}{\mathbf{5}\boldsymbol{n} + \mathbf{4}}$ تقترب من $\frac{2}{5}$.

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n} - \mathbf{3}}{\mathbf{5}\boldsymbol{n} + \mathbf{4}} = \frac{2(\infty) - 3}{5(\infty) + 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n} - \frac{3}{n}}{\frac{5n}{n} + \frac{4}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{n}}{5 + \frac{4}{n}}$$

$$= \frac{2 - \frac{3}{\infty}}{5 + \frac{4}{\infty}} = \frac{2}{5}$$

بما ان غاية المتتابعة موجودة اذن المتتابعة متقاربة convergent الى القيمة $\frac{2}{5}$.

مثال (9) هل ان المتتابعة $\forall\, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{f(n) = (-1)^{n-1}}$ متقاربة؟

نستخرج حدود المتتابعة

$$n = 1 \ \rightarrow f_1 = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n-1}} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{1-1}} = 1$$

$$n = 2 \ \rightarrow f_2 = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n-1}} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{2-1}} = -1$$

$$n = 3 \ \rightarrow f_3 = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n-1}} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{3-1}} = 1$$

$$n = 4 \ \rightarrow f_4 = (-\mathbf{1})^{\mathbf{4-1}} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{3}} = -1$$

اذن حدود المتتابعة هي

$$\{1\,, -1\,, 1\,, -1\,, \cdots\cdots\}$$

اذن يمكن كتابة حدود المتتابعة وفق الشكل

$$f(n) = \begin{cases} 1 & if \quad n\ is\ odd \\ -1 & if \quad n\ is\ even \end{cases}$$

نحسب الغاية $\lim_{n\to\infty} f(n)$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}$$

بما انه توجد قيمتان مختلفة لغاية المتتابعة اذن المتتابعة متباعدة.