المحاضرة 8 / المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2021

4.المتتابعة العددية او الحسابية

تسمى بالمتتابعة الحسابية عندما يكون حاصل طرح كل حد لاحق من الحد الذي يسبقه لحدود متتابعة معينة يعطي عدداً ثابتاً لكل قيم n وفق الصيغة:

$$\boldsymbol{f_{n+1} - f_n = r}$$

f_{n+1}: الحد اللاحق في المتتابعة

f_n: الحد السابق في المتتابعة

r: اساس المتتابعة

مثال (10) بين هل ان المتتابعة التالية حسابية ام لا.

$\{8\ ,16\ ,24\ ,32\ ,40\}$

$f_{n+1} - f_n = r$

$40 - 32 = 8$

$32 - 24 = 8$

$24 - 16 = 8$

$16 - 8 = 8$

بما ان حاصل طرح كل حد لاحق من الحد الذي يسبقه يعطي مقدار ثابت هو 8 اذن المتتابعة حسابية.

ولحساب اي حد في المتتابعة الحسابية نستخدم القانون التالي

$$\boldsymbol{f_n = f_1 + (n - 1)r}$$

f_n: يمثل الحد النوني للمتتابعة

f_1: يمثل الحد الاول للمتتابعة

n: تمثل قيمة الحد

r: يمثل اساس المتتابعة

مثال (11) اوجد الحد الخامس عشر للمتتابعة العددية التالية

$\{-1 , -4 , -7 , -10\}$

الحل:

$f_{n+1} - f_n = r$

$-10 - (-7) = -3$

$-7 - (-4) = -3$

$-4 - (-1) = -3$

اساس المتتابعة $r = -3$

الحد الاول للمتتابعة $f_1 = -1$

الحد النوني $f_n = f_{15}$

$\boldsymbol{f_n = f_1 + (n-1)r}$

$f_{15} = -1 + (15 - 1) * -3$

$f_{15} = -1 - 42 = -43$

مثال (12) اوجد الحد الثالث والعشرون للمتتابعة العددية التالية

$\{4 , 14 , 24 , 34 , 44\}$

الحل:

$f_{n+1} - f_n = r$

$44 - 34 = 10$

$34 - 24 = 10$

$24 - 14 = 10$

$14 - 4 = 10$

اساس المتتابعة $r = 10$

الحد الاول للمتتابعة $f_1 = 4$

الحد النوني $f_n = f_{23}$

$$\boldsymbol{f_n = f_1 + (n-1)r}$$

$$f_{23} = 4 + (23-1) * 10$$

$$f_{23} = 4 + 220 = 224$$

ملاحظة 1:

1. تكون المتتابعة $\{f(n)\}$ متزايدة اذا كان $f(n) \leq f(n+1)$ لجميع قيم n.
2. تكون المتتابعة $\{f(n)\}$ متناقصة اذا كان $f(n) \geq f(n+1)$ لجميع قيم n.
3. تكون المتتابعة $\{f(n)\}$ لا متزايدة ولا متناقصة اذا كان

$f(n) > f(n+1)$ عندما n عدد زوجي

$f(n) < f(n+1)$ عندما n عدد فردي

مثال (13) بين فيما اذا كانت المتتابعة التالية متزايدة ام متناقصة.

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}$$

الحل:

$$\frac{1}{n+1}$$

$$f(n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n}\right\}$$

$$f(n+1) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n+1}\right\}$$

بما ان $f(n) \geq f(n+1)$ اذن المتتابعة متناقصة، نلاحظ ايضاً ان حدود المتتابعة $f(n)$ متناقصة مما يدل على ان المتتابعة متناقصة.

مثال (14) بين فيما اذا كانت المتتابعة التالية متزايدة ام متناقصة.

$$\left\{\frac{(-\mathbf{1})^{n}}{\boldsymbol{n}}\right\}$$

الحل:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$f(n) = \left\{-1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{-1}{3}\,, \frac{1}{4}\,, \cdots\cdots, \frac{(-1)^{n}}{n}\right\}$$

$$f(n+1) = \left\{\frac{1}{2}\,, \frac{-1}{3}\,, \frac{1}{4}\,, \frac{-1}{5}, \frac{1}{6} \cdots\cdots, \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}$$

نلاحظ ان حدود المتتابعة $f(n)$ لا متزايدة ولا متناقصة لانه عندما n عدد فردي فأن

$$f(n) = \left\{-1\,, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{5}\,, \cdots\cdots\right\} < f(n+1) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\,, \frac{1}{6}, \cdots\cdots\right\}$$

وعندما n عدد زوجي فأن

$$f(n) = \left\{\frac{1}{2}\,, \frac{1}{4}, \cdots\cdots\right\} > f(n+1) = \left\{\frac{-1}{3}, \frac{-1}{5}\,, \cdots\cdots\right\}$$

مثال (15) بين فيما اذا كانت المتتابعة التالية متزايدة ام متناقصة.

$$\{n^2+1\}$$

الحل:

$$f(n) = \{2\,, 5\,, 10\,, 17\,, \cdots n^2+1\}$$

$$(n+1)^2+1$$

$$f(n+1) = \{\,5\,, 10\,, 17\,, \cdots (n+1)^2+1\}$$

بما ان $f(n) \leq f(n+1)$ اذن المتتابعة متزايدة، نلاحظ ايضاً ان حدود المتتابعة $f(n)$ متزايدة مما يدل على ان المتتابعة متزايدة.

ملاحظة 2:

اذا كان $\{g(n)\}$, $\{f(n)\}$ متتابعتين متقاربتين فأن

1. $\{f(n) \mp g(n)\}$ متتابعة متقاربة وغايتها

$$\lim_{n\to\infty}\{f(n) \mp g(n)\} = \left\{\lim_{n\to\infty} f(n) \mp \lim_{n\to\infty} g(n)\right\}$$

2. $\{f(n) * g(n)\}$ متتابعة متقاربة وغايتها

$$\lim_{n\to\infty}\{f(n) * g(n)\} = \left\{\lim_{n\to\infty} f(n) * \lim_{n\to\infty} g(n)\right\}$$

3. $\left\{\frac{f(n)}{g(n)} \qquad g(n) \neq 0\right\}$ متتابعة متقاربة وغايتها

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f(n)}{g(n)}\right\} = \left\{\frac{\lim_{n\to\infty} f(n)}{\lim_{n\to\infty} g(n)}\right\}$$

4. $\{k\, f(n)\}$ متتابعة متقاربة و k ثابت غايتها

$$\lim_{n\to\infty}\{k\, f(n)\} = \left\{k \lim_{n\to\infty} f(n)\right\}$$

5. المتتابعة k متقاربة وغايتها k (غاية متتابعة الثابت تساوي الثابت نفسه).

5. المتتابعة الهندسية

تسمى بالمتتابعة الهندسية عندما يكون حاصل قسمة كل حد لاحق على الحد الذي يسبقه لحدود متتابعة معينة يعطي عدداً ثابتاً يمثل اساس المتتابعة الهندسية وفق الصيغة:

$$\boldsymbol{\frac{f_{n+1}}{f_n} = r}$$

f_{n+1}: الحد اللاحق في المتتابعة

f_n: الحد السابق في المتتابعة

r: اساس المتتابعة

ويكون الحد النوني في المتتابعة الهندسية وفق الصيغة:

$$\boldsymbol{f_n = f_1\, r^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{f_2 = f_1\, r}$$

$$\boldsymbol{f_3 = f_1\, r^2}$$

$$\boldsymbol{f_4 = f_1\, r^3}$$

$$\boldsymbol{f_n = f_1\, r^{n-1}}$$

اذن هي متتابعة كل حد فيها يساوي حاصل ضرب العدد السابق بعدد ثابت هذا العدد الثابت يمثل اساس المتتابعة الهندسية.

مثال (16) اكتب الحدود الخمسة الاولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول 6 واساسها5.

$$\boldsymbol{f_1 = 6 \quad , \quad r = 5}$$

$$\boldsymbol{f_n = f_1\, r^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{f_2 = f_1\, r = 6 * 5 = 30}$$

$$\boldsymbol{f_3 = f_1\, r^2 = 6 * (5)^2 = 150}$$

$$\boldsymbol{f_4 = f_1\, r^3 = 6 * (5)^3 = 750}$$

$$\boldsymbol{f_5 = f_1\, r^4 = 6 * (5)^4 = 3750}$$

اذن حدود المتتابعة الهندسية هي $\{3750\,,\,750\,,\,150\,,\,30\,,\,6\}$.

$$\boldsymbol{\frac{f_{n+1}}{f_n} = r}$$

$$\frac{3750}{750} = 5$$

$$\frac{750}{150} = 5$$

$$\frac{150}{30} = 5$$

$$\frac{30}{6} = 5$$

مثال (17) اكتب حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الاول 4 وحدها السادس 128.

$$f_n = f_1\, r^{n-1}$$

$$f_6 = f_1\, r^5$$

$$128 = 4r^5$$

$$r^5 = \frac{128}{4} = 32$$

$$r = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$f_2 = f_1\, r = 4 * 2 = 8$$

$$f_3 = f_1\, r^2 = 4 * (2)^2 = 16$$

$$f_4 = f_1\, r^3 = 4 * (2)^3 = 32$$

$$f_5 = f_1\, r^4 = 4 * (2)^4 = 64$$

اذن حدود المتتابعة الهندسية هي $\{128\,,\,64\,,\,32\,,\,16\,,\,8\,,\,4\}$.