المحاضرة 9 / المتسلسلات Series

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2021

6. المتسلسلات Series

تعرفنا في المواضيع السابقة على المتتابعة التي تكون عبارة عن مجموعة مرتبة من الاعداد الحقيقية وفق قاعدة معينة تفصل بين حدودها الفارزة (,) اذا استبدلنا الفارزة (,) بأشارة الجمع (+) فأن المتتابعة في هذه الحالة تسمى متسلسلة التي تكون عبارة عن حاصل جمع حدود المتتابعة سواء كانت المتتابعة حسابية او هندسية، فأذا كانت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة غير منتهية من الاعداد الحقيقية فأن الصيغة التالية المتكونة من حاصل جمع حدود هذه المتتابعة تسمى متسلسلة لا نهائية وفق الصيغة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots\cdots + f_n + \cdots\cdots$$

اذا كانت $\{S_n\}$ عبارة عن متتابعة تتضمن n من الاعداد الحقيقية

$$S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots\cdots + f_n$$

$$S_1 = f_1$$

$$S_2 = f_1 + f_2$$

$$S_3 = f_1 + f_2 + f_3$$

$$\vdots$$

- ♣ تكون المتسلسلة اللانهائية متقاربة اذا كانت المتتابعة S_n متقاربة اي ان $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ حيث ان L يمثل مجموع المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.
- ♣ تكون المتسلسلة متباعدة اذا كانت المتتابعة S_n متباعدة اي ان $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ اذن المتسلسلة لا يوجد لها مجموع.

مثال (18) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

بما ان المتتابعة $\{S_n\}$ متباعدة اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{n}$ متباعدة اي ليس لها مجموع.

مثال (19) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathbf{1})^{n}$.

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathbf{1})^{n} = -1$$

$$S_n = -1 + 1 - 1 + 1 \cdots\cdots + (-\mathbf{1})^{n}$$

$$S_1 = f_1 = -1$$

$$S_2 = f_1 + f_2 = -1 + 1 = 0$$

$$S_3 = f_1 + f_2 + f_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

$$S_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\vdots$$

$$S_n = \begin{cases} -1 & if\ n\ is\ odd \\ 0 & if\ n\ is\ even \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(0) = 0$$

بما ان غاية المتتابعة $\{S_n\}$ غير موجودة اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathbf{1})^{n}$ متباعدة اي ليس لها مجموع.

مثال (20) برهن ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}$ متقاربة.

الحل:

$$f_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots \ldots\ldots$$

$$S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots\cdots + f_n$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{\infty + 1} = 1 - 0 = 1$$

بما ان المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة وتقترب الى (1) اذن المتسلسلة متقاربة ومجموعها يساوي واحد.

مثال (21) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

الحل:

$$f_n = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

نضرب في مرافق الجذر

$$f_n = \frac{\mathbf{1}}{(\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \sqrt{\boldsymbol{n}})} * \frac{\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \sqrt{\boldsymbol{n}}}{(\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \sqrt{\boldsymbol{n}})}$$

$$= \frac{\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \sqrt{\boldsymbol{n}}}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1} - \sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}\sqrt{\boldsymbol{n}} + \sqrt{\boldsymbol{n}}\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \boldsymbol{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \sqrt{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}-\boldsymbol{n}} = \sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \sqrt{\boldsymbol{n}}$$

$$S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots\cdots + f_n$$

$$S_n = (\sqrt{\mathbf{2}} - 1) + (\sqrt{\mathbf{3}} - \sqrt{\mathbf{2}}) + (\sqrt{\mathbf{4}} - \sqrt{\mathbf{3}}) + (\sqrt{\mathbf{5}} - \sqrt{\mathbf{4}}) + \cdots\cdots + (\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \sqrt{\boldsymbol{n}})$$

$$S_n = -1 + \sqrt{\boldsymbol{n} + \mathbf{1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} -1 + \sqrt{\boldsymbol{n} + \mathbf{1}} = -1 + \sqrt{\infty + \mathbf{1}} = \infty$$

بما ان المتتابعة $\{S_n\}$ متباعدة اذن المتسلسلة $\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}+\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ متباعدة.