المحاضرة 10 / المتسلسلة الحسابية والمتسلسلة الهندسية

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2021

7.المتسلسلة الحسابية **Arithmetic Series**

كل حد في هذه المتسلسلة يزيد عن الحد الذي يسبقه بمقدار ثابت هذا المقدار الثابت يمثل الاساس (r) يكون الشكل العام لهذه المتسلسلة وفق الصيغة:

$$a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) + \cdots\cdots + (a + (n - 1)r) + \cdots$$

a : يمثل الحد الاول

r : يمثل الاساس

من امثلة المتسلسلة الحسابية الصيغة التالية:

$$S_n = \sum_{n=1}^{5} (2n + 5) = 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

يتم استخدام قانون جاوس لحساب المجموع للمتسلسلة الحسابية وفق الصيغة:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

S_n: يمثل المجموع للمتسلسلة

n : يمثل عدد الحدود

a_1: يمثل الحد الاول

a_n: يمثل الحد النوني او الحد العام

يمكن الحصول على قانون ثاني لحساب مجموع المتسلسلة الحسابية من خلال تعويض قانون الحد النوني a_n في القانون اعلاه كما في الصيغة التالية:

$$a_n = a_1 + (n -$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)r)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)r)$$

مثال (22) اوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التالية

$$S_4 = \sum_{n=1}^{4}(2n+1)$$

$$S_4 = 3 + 5 + 7 + 9$$

$$r = a_{n+1} - a_n = 5 - 3 = 2$$

$$a_1 = (2n+1) = 2 * 1 + 1 = 3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)r)$$

$$S_4 = \frac{4}{2}(2 * 3 + (4-1) * 2) = 2(6+6) = 24$$

مثال (23) اختبر تقارب المتسلسلة الحسابية التالية

$$1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \frac{7}{2} + \cdots + \frac{n+1}{2} + \cdots$$

$$r = a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 1$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)r)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2 + \frac{(n-1)}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{4+n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{3+n}{2}\right) = \frac{3n+n^2}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+n^2}{4} = \frac{3(\infty)+(\infty)^2}{4} = \infty$$

اذن المتسلسلة متباعدة.

مثال (24) اوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التالية ثم اختبر تقارب المتسلسلة

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$r = a_{n+1} - a_n = 2 - 1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)r)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2 * 1 + (n-1) * 1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2 + n - 1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2} = \frac{(\infty)^2+\infty}{2} = \infty$$

اذن المتسلسلة متباعدة.

8. المتسلسلة الهندسية Geometric Series

حاصل قسمة كل حد في هذه المتسلسلة على الحد الذي يسبقه يعطي مقدار ثابت هذا المقدار الثابت يمثل الاساس (r) يكون الشكل العام لهذه المتسلسلة وفق الصيغة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

a : يمثل الحد الاول

r : يمثل الاساس

من امثلة المتسلسلة الهندسية الصيغة التالية:

$$S_n = \sum_{n=1}^{5} 3^n = 3 + 9 + 27 + 81 + 243$$

يتم استخدام القانون التالي لحساب المجموع للمتسلسلة الهندسية وفق الصيغة:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

S_n :يمثل المجموع للمتسلسلة

n : يمثل عدد الحدود

a :يمثل الحد الاول

- تكون المتسلسلة متقاربة اذا كان $|r| < 1$ اي ان $-1 < r < 1$ وبالتالي يتم حساب المجموع للمتسلسلة وفق الصيغة:

$$S_n = \frac{a}{(1-r)}$$

- تكون المتسلسلة متباعدة اذا كان $|r| \geq 1$ اي ان $r \geq 1 \quad or \quad r \leq -1$ وبالتالي ليس لها مجموع.

مثال (25) اوجد مجموع المتسلسلة التالية

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a=1$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{1/2}{1}=\frac{1}{2}$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$$

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_n=\frac{1*(1-(1/2)^n)}{\left(1-(1/2)\right)}$$

$$S_n=2\,(1-(1/2)^n)$$

مثال (26) اختبر تقارب المتسلسلة التالية ثم اوجد مجموع المتسلسلة.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots$$

$$=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

اذن المتسلسلة هندسية

$$a=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{1/2^3}{1/2^2}=\frac{1}{2}<1$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{1/2^4}{1/2^3}=\frac{1}{2}<1$$

بما ان قيمة $1 < \frac{1}{2} = r$ اذن المتسلسلة متقاربة نحسب المجموع للمتسلسلة

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_n = \frac{1/4 * (1-(1/2)^n)}{\left(1-(1/2)\right)} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

اذن المتسلسلة متقاربة ومجموعها يساوي $\frac{1}{2}$.

او مباشرةً حساب المجموع للمتسلسلة بعد التأكد من $r < 1$ وفق الصيغة:

$$S_n = \frac{a}{(1-r)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

مثال (27) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3}$ ثم اوجد مجموع المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{3} + \cdots\cdots + \frac{2^n}{3} + \cdots$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} * 2 + \frac{2}{3} * 2^2 + \frac{2}{3} * 2^3 + \cdots\cdots$$

$$= a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1}$$

اذن المتسلسلة هندسية

$$a = \frac{2}{3}$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{2^2/3}{2/3}=\frac{4}{3}*\frac{3}{2}=2>1$$

بما ان قيمة $r=2>1$ اذن المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_n=\frac{2/3*(1-(2)^n)}{(1-2)}=-\frac{2}{3}(1-(2)^n)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}-\frac{2}{3}(1-(2)^n)$$

$$=\frac{-2}{3}(1-(2)^{\infty})=\infty$$

مثال (28) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=}^{\infty}$$

$$a=1$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{-1/3}{1}=\frac{-1}{3}<1$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{(-1/3)^{\mathbf{2}}}{-1/3}=\frac{-1}{3}<1$$

اذن المتسلسلة هندسية

بما ان قيمة $r=\left|\frac{-1}{3}\right|<1$ اذن المتسلسلة متقاربة نحسب المجموع للمتسلسلة وفق القانون

$$S_n=\frac{a}{(1-r)}$$

$$=\frac{1}{(1+\frac{1}{3})}=\frac{3}{4}$$