المحاضرة 11 / اختبارات التقارب للمتسلسلات/اختبار التكامل

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2021

ملاحظة

اذا كانت كل من $\sum b_n$ و $\sum a_n$ متسلسلتين فأن

1. المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة $\mp$ المتسلسلة $\sum b_n$ متباعدة فأن المتسلسلة الناتجة تكون متباعدة.
2. المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة $\mp$ المتسلسلة $\sum b_n$ متباعدة فأن المتسلسلة الناتجة تكون متباعدة.
3. المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة $\mp$ المتسلسلة $\sum b_n$ متقاربة فأن المتسلسلة الناتجة تكون متقاربة.

مثال (29) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4^n}+2^n)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4^n}+2^n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$$

$$a=\frac{1}{4}$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{1/4^2}{1/4}=\frac{1}{4}<1$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{1/4^3}{1/4^2}=\frac{1}{4}<1$$

اذن المتسلسلة هندسية

بما ان قيمة $r=\frac{1}{4}<1$ اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = \mathbf{2} + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + \cdots$$

$$a = 2$$

$$r = \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{2^2}{2} = 2 > 1$$

$$r = \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{2^3}{2^2} = 2 > 1$$

اذن المتسلسلة هندسية

بما ان قيمة $r = 2 > 1$ اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ متباعدة.

اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4^n} + 2^n)$ تكون متباعدة.

مثال (30) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(2 + 3^n)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2 + 3^n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 = 2 + 2 +$$

$$a = 2$$

$$r = \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{2}{2} = 1$$

اذن المتسلسلة هندسية

بما ان قيمة $r = 1$ اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 2$ متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n = \mathbf{3} + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n + \cdots$$

$$a = 3$$

$$r = \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{3^2}{3} = 3 > 1$$

$$r = \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{3^3}{3^2} = 3 > 1$$

اذن المتسلسلة هندسية

بما ان قيمة $r = 3 > 1$ اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ متباعدة.

اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(2 + 3^n)$ تكون متباعدة.

مثال (31) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^n})$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^2}$$

$$a = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$r = \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{1/3^3}{1/3^2} = \frac{1}{3} < 1$$

$$r = \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{1/3^4}{1/3^3} = \frac{1}{3} < 1$$

اذن المتسلسلة هندسية

بما ان قيمة $r = \frac{1}{3} < 1$ اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}$ متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

$$a=\frac{1}{2}$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{1/2^2}{1/2}=\frac{1}{2}<1$$

$$r=\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\frac{1/2^3}{1/2^2}=\frac{1}{2}<1$$

اذن المتسلسلة هندسية

بما ان قيمة $r=\frac{1}{2}<1$ اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ متقاربة.

اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^n})$ تكون متقاربة.

9. اختبارات التقارب للمتسلسلات

1. اختبار التكامل Integral Test

يستخدم اختبار التكامل لاختبار تقارب وتباعد المتسلسلات ذات الحدود الموجبة وفق الشروط التالية:

- $\sum f(x)$ يجب ان تكون حدودها موجبة.
- $\sum f(x)$ يجب ان تكون دالة متناقصة.
- $\sum f(x)$ يجب ان تكون دالة مستمرة.
- $\sum f(x)$ تكون متقاربة اذا كان $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$ موجودة.
- $\sum f(x)$ تكون متباعدة اذا كان $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$ غير موجودة.

مثال (32) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ بأستخدام اختبار التكامل.

الحل:

$$1.\ \boldsymbol{f(n)=\frac{1}{n}} \qquad ,n\geq 1$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}}>0 \qquad ,x\geq 1$$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(x)}$ دالة حدودها موجبة لانه قيم $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}>0$.

$$2.\ \acute{f}(x)=\frac{-1}{x^2}<0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(x)}$ دالة متناقصة وبما ان الدالة حدودها موجبة ومتناقصة اذن الدالة تكون مستمرة.

بما ان الشروط الثلاثة متحققة نطبق الصيغة

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$$

$$\int_1^n f(x)dx=\int_1^n \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}dx=[Ln\,x]_1^n$$

$$=Ln\,n-Ln\,1=Ln\,n-0$$

$$=Ln\,n$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}Ln\,n=Ln\,\infty=\infty$$

اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة.

مثال (33) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}n\,e^{-n^2}$ بأستخدام اختبار التكامل.

الحل:

$$1.\ \boldsymbol{f(n)}=n\,e^{-n^2} \qquad ,n\geq 1$$

$$\boldsymbol{f(x)}=x\,e^{-x^2} \qquad ,x\geq 1$$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(x)}$ دالة حدودها موجبة لان $x\,e^{-x^2}>0$.

$$2.\acute{f}(x) = x\,(e^{-x^2} * (-2x)) + e^{-x^2} * 1$$

$$= -2x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}$$

$$= e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(x)}$ دالة متناقصة وبما ان الدالة حدودها موجبة ومتناقصة اذن الدالة تكون مستمرة.

بما ان الشروط الثلاثة متحققة نطبق الصيغة

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$$

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^n x\, e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2}\int_1^n -2x\, e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2}\,[e^{-x^2}]_1^n$$

$$= \frac{-1}{2}\left[e^{-n^2} - e^{-1}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2}\left[e^{-n^2} - e^{-1}\right] = \frac{-1}{2}\,[\, e^{-\infty} - e^{-1}]$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e}\right] = \frac{-1}{2}\left[0 - \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{2e}$$

اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n^2}$ متقاربة.