المحاضرة 12 / اختبارات التقارب للمتسلسلات

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2021

المتسلسلة P

الشكل العام لهذه المتسلسلة هو

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

- تكون المتسلسلة P متقاربة اذا كانت $p > 1$
- تكون المتسلسلة P متباعدة اذا كانت $p \leq 1$

المتسلسلة P هي دالة حدودها موجبة ومتناقصة ومستمرة لكل $n \geq 1$ لذا سوف نستخدم اختبار التكامل لمعرفة تقارب وتباعد المتسلسلة.

مثال (34) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ بأستخدام اختبار التكامل.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

$$p=2>1$$

اذن المتسلسلة P متقاربة

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$$

$$\boldsymbol{f(x)}=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$$

$$\int_1^n f(x)dx=\int_1^n x^{-2}\ dx=[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}]_1^n=-n^{-1}+1=1-\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{\infty}=1-0=1$$

اذن **المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة.

مثال (35) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ بأستخدام اختبار التكامل.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}=\frac{1}{1^{1/2}}+\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}}+\frac{1}{4^{1/2}}+\cdots+\frac{1}{n^{1/2}}+\cdots$$

$$p=\frac{1}{2}<1$$

اذن المتسلسلة P متباعدة

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$$

$$\boldsymbol{f(x)}=\frac{1}{x^{1/2}}=x^{-1/2}$$

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x^{1/2}}dx = \int_1^n x^{-1/2}\ dx = [\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}]_1^n = \frac{n^{1/2}}{1/2} - \frac{1^{1/2}}{1/2}$$
$$= 2(n^{1/2} - 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \lim_{n\to\infty} 2(n^{1/2} - 1) = 2(\infty^{1/2} - 1) = \infty$$

اذن **المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ متباعدة.

2. اختبار المقارنة **Comparison Test**

يستخدم اختبار المقارنة لاختبار تقارب وتباعد المتسلسلات ذات الحدود الموجبة ايضاً

- تكون المتسلسلة الموجبة $\sum a_n$ متقاربة اذا كان كل حد من حدودها اصغر او يساوي الحد المقابل من متسلسلة موجبة متقاربة معلومة $\sum b_n$ اي ان $a_n \le b_n$.
- تكون المتسلسلة الموجبة $\sum a_n$ متباعدة اذا كان كل حد من حدودها اكبر او يساوي الحد المقابل من متسلسلة موجبة متباعدة معلومة $\sum b_n$ اي ان $a_n \ge b_n$.

مثال (36) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+6n}$ **بأستخدام اختبار المقارنة مع المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots$$

$p = 3 > 1$ اذن متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 6n} = \frac{1}{7} + \frac{1}{20} + \frac{1}{45} + \cdots + \frac{1}{n^3 + 6n} + \cdots$$

$$\therefore\ \frac{1}{n^3+6n} < \frac{1}{n^3}$$

بما ان كل حد من حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+6n}$ اصغر من حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+6n}$ متقاربة.

مثال (37) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$ بأستخدام اختبار المقارنة مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$p = 1$ اذن متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{n+1} + \cdots$$

$$\frac{2}{n+1} > \frac{1}{n}$$

بما ان كل حد من حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$ اكبر من حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$ متباعدة.

3. اختبار النسب Ration Test

يستخدم اختبار النسب لاختبار تقارب وتباعد المتسلسلات ذات الحدود الموجبة ايضاً اذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة ولنفرض ان $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

- تكون المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة اذا كانت $L < 1$
- تكون المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة اذا كانت $L > 1$
- يهمل الاختبار اذا كانت $L = 1$

مثال (38) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6^n}$ بأستخدام اختبار النسب.

$$a_n = \frac{n+2}{6^n} \qquad , \quad a_{n+1} = \frac{n+3}{6^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to}$$

$$= \lim_{n\to\infty}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty}$$

$$= \frac{1}{6} * \frac{1 +}{1 +}$$

اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6^n}$ متقاربة.

مثال (39) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ بأستخدام اختبار النسب.

$$a_n = \frac{2^n}{n^2} \qquad , \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to}$$

$$= \lim_{n\to\infty}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{}{n}$$

$$= \frac{2}{1 + \frac{2}{\infty}}$$

اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ متباعدة.

4. اختبار المتسلسلة المتناوبة او المتنبذبة (اختبار ديرشلي)

المتسلسلة المتناوبة هي المتسلسلات التي تتضمن حدود موجبة وسالبة ويكون الشكل العام لهذه المتسلسلات هو

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots\cdots$$

لاختبار تقارب وتباعد المتسلسلات المتناوبة سوف نستخدم اختبار ديرشلي حسب الخطوات التالية:

- تكون المتسلسلة المتناوبة متقاربة اذا حققت الشرطين:

$$1. \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \qquad\qquad 2. \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- تكون المتسلسلة المتناوبة متباعدة اذا لم يتحقق احد الشرطين اعلاه.

مثال (40) اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathbf{1})^{n+1}\frac{\mathbf{1}}{(n+\mathbf{1})^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \cdots$$

$$a_n = \frac{\mathbf{1}}{(n+\mathbf{1})^2} \qquad , \quad a_{n+1} = \frac{\mathbf{1}}{(n+\mathbf{1}+\mathbf{1})^2} = \frac{\mathbf{1}}{(n+\mathbf{2})^2}$$

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)^2} * \frac{(n+1)^2}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^2}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{n}^2+\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2+\mathbf{4}\boldsymbol{n}+\mathbf{4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\boldsymbol{n}^2}{\boldsymbol{n}^2}+\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2}}{\frac{\boldsymbol{n}^2}{\boldsymbol{n}^2}+\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}^2}+\frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{n}^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2}}{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{n}}+\frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{n}^2}} = \frac{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2}}{\infty}+\frac{\mathbf{1}}{\infty^2}}{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{4}}{\infty}+\frac{\mathbf{4}}{\infty^2}} = 1$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{}{\boldsymbol{n}^2}$$

اذن المتسلسلة المتناوبة $\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty}(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^2}$ متقاربة.