المحاضرة 13 / متسلسلات القوى Power Series

المرحلة الثانية/ الكورس الاول

قسم الاحصاء

الدراسة الصباحية

2021

10. متسلسلات القوى Power Series

تسمى المتسلسلات اللانهائية ذات الحدود المتغيرة القيمة بمتسلسلات القوى ويكون الشكل العام لهذه المتسلسلات وفق الصيغة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n$$

المتسلسلة اعلاه عبارة عن متسلسلة قوى في x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots\cdots + a_n(x-b)^n$$

المتسلسلة اعلاه عبارة عن متسلسلة قوى في $x-b$ حيث b عدد ثابت.

يستخدم اختبار النسب لاختبار تقارب وتباعد متسلسلة القوى مع اخذ القيمة المطلقة للاختبار وفق الصيغة:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

- تكون متسلسلة القوى متقاربة اذا كانت $L < 1$
- تكون متسلسلة القوى متباعدة اذا كانت $L > 1$

مثال (41) اختبر تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x}{4}$$

$$a_n = \frac{x^n}{n^2} \qquad , \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{(n+1)}}\right.$$

$$=$$

$$= |$$

متسلسلة القوى متقاربة عندما $|x| < 1$ اي ان $-1 < x < 1$

عندما $x = 1$ تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متسلسلة P وان $p = 2 > 1$ اذن المتسلسلة متقاربة عند $x = 1$.

عندما $x = -1$ تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ متسلسلة متناوبة ومتقاربة حسب اختبار ديرشلي اذن المتسلسلة متقاربة عند $x = -1$.

مثال (42) اختبر تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2} = 3x$$

$$a_n = \frac{3^n\, x^n}{n^2} \qquad , \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}\, x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n x^n}{n^2}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1} x}{(n+1}\right.$$

$$=$$

$$= 3$$

$$= 3|x| < 1$$

متسلسلة القوى متقاربة عندما $|x| < \frac{1}{3}$ اي ان $\frac{-1}{3} < x < \frac{1}{3}$

عندما $x = \frac{1}{3}$ تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \frac{1}{3^n}}{n^2}$ متسلسلة P وان $p = 2 > 1$ اذن متسلسلة القوى متقاربة عند $x = \frac{1}{3}$.

عندما $x = \frac{-1}{3}$ تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \frac{(-1)^n}{3^n}}{n^2}$ متسلسلة متناوبة ومتقاربة حسب اختبار ديرشلي اذن متسلسلة القوى متقاربة عند $x = \frac{-1}{3}$.

11. متسلسلة تايلر وماكلورين Taylor and Maclaurin

اذا كانت f دالة بدلالة x فأن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ($$

حتى نجد سلسلة تايلر وماكلورين لهذه الدالة نقوم بحساب a_n وفق الصيغة:

$$a_n = f(b) + f^{(1)}(b) + \frac{f^{(2)}(b)}{2!} + \frac{f^{(3)}(b)}{3!} + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

$f(b)$: الحد الاول عبارة عن تعويض النقطة $x = b$ (تعطى في السؤال) في الدالة الاصلية.

$f^{(1)}(b)$: الحد الثاني عبارة عن اشتقاق الدالة مشتقة اولى وتعويض النقطة $x = b$.

$\frac{f^{(2)}(b)}{2!}$: الحد الثالث عبارة عن شتقاق الدالة مشتقة ثانية وتعويض النقطة $x = b$ ثم قسمة المشتقة على $2!$.

$\frac{f^{(3)}(b)}{3!}$: الحد الرابع عبارة عن اشتقاق الدالة مشتقة ثالثة وتعويض النقطة $x = b$ ثم قسمة المشتقة على $3!$.

بعد الحصول على a_n نعوضها في قانون تايلر سوف تصبح سلسلة تايلر للدالة متوفرة.

اما متسلسلة ماكلورين هي حالة خاصة من متسلسلة تايلر عندما $b = 0$.

مثال (43) اوجد متسلسلة تايلر للدالة $f(x) = \sin x$ الى ثلاث حدود.

الحل:

قيمة b اذا لم تعطى في السؤال يغني قيمتها صفر $b = 0$.

$$\boldsymbol{f(x) = \sin x}$$

$$\boldsymbol{f(0) = \sin 0 = 0}$$

$$\boldsymbol{f^{(1)}(x) = \cos x \;\rightarrow\; f^{(1)}(0) = \cos 0 = 1}$$

$$\boldsymbol{f^{(2)}(x) = -\sin x \;\rightarrow\; f^{(2)}(0) = -\sin 0 = 0}$$

$$\boldsymbol{f^{(3)}(x) = -\cos x \;\rightarrow\; f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1}$$

$$a_n = f(b) + f^{(1)}(b) + \frac{f^{(2)}(b)}{2!} + \frac{f^{(3)}(b)}{3!} + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

$$a_n = 0 + 1 + 0 - \frac{1}{3!}$$

اذن متسلسلة ماكلورين تكون وفق الصيغة

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ($$

$$= 0 * 1 + 1 * x + 0 * x^2 + \frac{(-1)}{3!} x^3 = x - \frac{1}{3!} x^3$$

$$\boldsymbol{sin\, x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-$$

مثال (44) اوجد متسلسلة تايلر للدالة $f(x) = e^{x/2}$ بدلالة قوى $(x-1)$ الى ثلاث حدود.

الحل:

قيمة $b = 1$.

$$\boldsymbol{f(x) = e^{x/2}}$$

$$\boldsymbol{f(1) = e^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{f^{(1)}(x) = \frac{1}{2} e^{x/2} \rightarrow f^{(1)}(1) = \frac{1}{2} e^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{f^{(2)}(x) = \frac{1}{4} e^{x/2} \rightarrow f^{(2)}(1) = \frac{1}{4} e^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{f^{(3)}(x) = \frac{1}{8} e^{x/2} \rightarrow f^{(3)}(1) = \frac{1}{8} e^{1/2}}$$

$$a_n = f(b) + f^{(1)}(b) + \frac{f^{(2)}(b)}{2!} + \frac{f^{(3)}(b)}{3!} + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

$$\boldsymbol{= e^{1/2} + \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}}{1!} + \frac{\frac{1}{4} e^{1/2}}{2!} + \frac{\frac{1}{8} e^{1/2}}{3!}}$$

اذن متسلسلة تايلر تكون وفق الصيغة

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,($$

$$=$$