

أنواع الخطأ

هناك نوعان للخطأ

أولاً الخطأ المطلق Absolute error

وهو القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية
ويحسب وفق المعادلة التالية:

$$e_x = |x - \hat{x}|$$

ثانياً الخطأ النسبي

وهو نسبة الخطأ المطلق (e_x) إلى قيمة x المقنونة
ويرمز له بالرمز (δ_x)

ويحسب وفق الصيغة التالية:

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

أو يمكن أن ينسب إلى القيمة التقريبية فتكون

الصيغة:

$$\delta_x = \frac{e_x}{\hat{x}}$$

* الأخطاء في العمليات الحسابية

إن التعامل مع القيم التقريبية يؤدي إلى حدوث أخطاء في نتائج العمليات الحسابية الأربعة لذلك لا بد من معرفة الأخطاء المطلق والنسبي لكل عملية حسابية حيث إن X و Y هي القيم التقريبية للقيم الحقيقية X و Y

— الجمع

إذا كانت X و Y تمثل القيم التقريبية لـ X و Y فإن الخطأ

المطلق لحاصل الجمع هو

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

البرهان

$$e_{x+y} = (x+y) - (x^{\wedge} + y^{\wedge})$$

$$e_{x+y} = (x) + y - (x^{\wedge}) - y^{\wedge}$$

$$e_{x+y} = \underbrace{(x - x^{\wedge})}_{\downarrow} + \underbrace{(y - y^{\wedge})}_{\downarrow}$$

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

الخطأ النسبي يساوي

$$\delta_{x+y} = \frac{e_x + e_y}{x+y}$$

عند طرح العددين الثّوريين x^n و y^n ينتج الخطأ المطلق لعملية الطرح

الطرح

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

البرهان

$$e_{x-y} = (x-y) - (x^n - y^n)$$

$$= x - y - x^n + y^n$$

$$= (x - x^n) - (y - y^n)$$

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

الخطأ النسبي يساوي

$$\delta_{x-y} = \frac{e_x - e_y}{x - y}$$

أو يمكن أن تكتب وفق الآتي

$$\delta_{x-y} = \frac{x\delta_x - y\delta_y}{x-y}$$

الضرب

عند ضرب العددين التقريبيين \hat{x} و \hat{y} ينتج الخطأ المطلق لعملية الضرب

$$e_{xy} = x e_y + y e_x$$

البرهان

$$e_{xy} = (xy) - (\hat{x}\hat{y})$$

$$= xy - [(x - e_x)(y - e_y)]$$

تم التقويم في $e_y = y - \hat{y}$ و $e_x = x - \hat{x}$

$$\therefore \hat{x} = x - e_x \quad \text{و} \quad \hat{y} = y - e_y$$

$$e_{xy} = \cancel{xy} - \cancel{xy} + x e_y + y e_x - \boxed{e_x e_y}$$

يتم إهماله لأنه صغير جداً

$$e_{xy} = x e_y + y e_x$$

عند قسمة العددين التقريبيين \hat{x} و \hat{y} ينتج الخطأ المطلق لعملية القسمة

القسمة

$$e_{x/y} = \frac{x}{y} \left[\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} \right]$$

البرهان

$$e_{x/y} = \left(\frac{x}{y} \right) - \left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}} \right)$$

$$\frac{\hat{x}}{\hat{y}} = \frac{x - e_x}{y - e_y} = \frac{x - e_x}{y \left(1 - \frac{e_y}{y} \right)} = \frac{x - e_x}{y} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{e_y}{y} \right)}$$

عوامل مشترك جزء المقام توسيع مقام

$$= \frac{1}{y - ey}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x - ex}{y} \left(1 + \frac{ey}{y} + \underbrace{\left(\frac{ey}{y} \right)^2 + \dots}_{\text{مقدار صغیر ہے}} \right)$$

$$= \frac{x - ex}{y} \left(1 + \frac{ey}{y} \right)$$

$$= \left(\frac{x}{y} - \frac{ex}{y} \right) \left(1 + \frac{ey}{y} \right)$$

$$= \frac{x}{y} + \frac{xey}{y^2} - \frac{ex}{y} - \frac{ex ey}{y^2}$$

صغیر ہے اس لیے

$$e_{x/y} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y} + \frac{xey}{y^2} - \frac{ex}{y} \right)$$

$$= \cancel{\frac{x}{y}} - \cancel{\frac{x}{y}} - \frac{xey}{y^2} + \frac{ex}{y}$$

$$= \frac{ex}{y} - \frac{xey}{y^2}$$

$$e_{x/y} = \frac{x}{y} \left[\frac{ex}{x} - \frac{ey}{y} \right]$$

الخطأ النسبي لعملية الضرب يساوي

$$\delta_{xy} = \delta_y + \delta_x$$

أما الخطأ النسبي لعملية القسمة يساوي

$$\delta_{x/y} = \delta_x - \delta_y$$