المحاضرة الخامسة

طريقة القاطع Secant Method

لتطبيق طريقة القاطع لايجاد جذر المعادلة $f(x)=0$ نجد قيمتين تقريبيتين للجذر (x_1 و x_0) ثم نحسب القيمة التقريبية الجديدة (x_2) والتي تكون عبارة عن تقاطع المستقيم المار بالنقطتين (x_1 و $f(x_1)$) و (x_0 و $f(x_0)$) مع محور $\underline{\underline{x}}$ وبنفس الطريقة يتم حساب الجذر x الى ان تصل الى المتتابعة x_i حسب الصيغة التالية

$$\boxed{\begin{gathered} x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{f(x_{i+1})}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} (x_{i+1} - x_i) \\ \text{حيث ان} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

نتوقف عندما نصل الى

$$\boxed{|x_i - x_{i-1}| < \epsilon}$$

Date No.

مثال

أوجد جذر المعادلة

$$f(x) = x - e^{-x}$$

باستخدام طريقة القاطع (secant method) وبخطأ مسموح به (0.0001) خلال الفترة (3و2)

الحل/

نطبق الصيغة

$$X_2 = X_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} (x_1 - x_0)$$

$$= 3 - \frac{2.95021}{2.95021 - 1.8646} (1)$$

$$= 0.28228$$

نحسب الخطأ

$$\epsilon = |X_2 - X_1|$$

$$\epsilon = |0.28228 - 3| = 2.7177$$

نستمر

$$X_3 = 0.65696$$

$$X_4 = 0.57191$$

$$X_5 = 0.56706$$

$$\boxed{X_6 = 0.56714}$$ جذر المعادلة

Date No.

مثال

أوجد جذر المعادلة

$$f(x) = x e^{x} - 1 = 0$$

بإستخدام طريقة القاطع بخطأ مسموح به (0.05) ضمن الفترة (0,1)

الحل

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = -1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow 1.718$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} (x_1 - x_0)$$

$$x_2 = 1 - \frac{1.718}{1.718 + 1} (1 - 0)$$

$$x_2 = 0.368 \Rightarrow f(x_2) = -0.468$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} (x_2 - x_1)$$

$$= 0.368 - \frac{-0.468}{-0.468 - 1.718} (0.368 - 1)$$

$$x_3 = 0.503 \Rightarrow f(x_3) = -0.168$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} (x_3 - x_2)$$

$$= 0.503 - \frac{-0.168}{-0.168 + 0.468} (0.503 - 0.368)$$

$$x_4 = 0.580$$

$$f(x_4) = 0.036$$

$$\because |f(x_4)| = 0.036 < \epsilon = 0.05$$

∴ الجذر هو $\boxed{0.580}$

مثال جد جذر المعادلة

$$f(x) = \sin(x) - x^2 + 1 = 0$$

بطريقة القاطع وبخطأ (0) ضمن الفترة (1,2)

ملاحظة ممكن بالسؤال لا يعطي الفترة نجدها عن طريق (الطريقة المبرمجة)

x	0	1	2
f(x)	+	+	−

∴ الفترة (1,2)

طريقة نيوتن - رافسون
(Newton- Raphson Method)

تعد هذه الطريقة من الطرائق المهمة وذات التقارب الدقيق لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في $[a,b]$

ولتكن x_0 (القيمة الاولية للجذر) فأن قيمة الجذر الجديد هي

$$X_1 = X_0 + h$$

حيث ان h هي قيمة التصحيح في X_0

$$f(x_1) = f(X_0 + h)$$

وباستخدام صيغة تايلر عند النقطة x_0

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{h f'(x_0)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_0)}{2!} + \cdots$$

$$= f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + (x_1 - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2} + \cdots$$

$$h = x_1 - x_0$$

لتكن x_1 قريبة من الجذر بالنسبة الى x_0 فأن $f(x_1) \cong 0$

وكذلك فأن x_1 تكون قريبة من x_0 فأن $(x_1 - x_0)$ ذات قيمة صغيرة

وعند تربيع $(x_1 - x_0)$ فأن ~~[illegible]~~ القيمة تكون أصغر وقريبة من الصفر

وكذلك الحال في الدرجات العليا لـ $(x_1 - x_0)$ فيمكن اهمال القيم من القوى 2 فأكثر.

Date No.

تصبح لنا

$$f(x_0) + (x_1 - x_0)\, f'(x_0) = 0$$

$$(x_1 - x_0)\, f'(x_0) = -f(x_0)$$

$$(x_1 - x_0) = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وهكذا بالنسبة الى x_3 ، x_4 ، ——— x_n

فالصيغة العامة تكون

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots$$

شرط التوقف

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \epsilon$$

$$|f(x_i)| \leq \epsilon$$

مثال

أوجد جذر من جذور المعادلة التالية باستخدام طريقة نيوتن - رافسون

$$\boxed{f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0}$$

الخطأ المسموح به (0) ضمن الفترة [0,1]

الحل

$$X_0 = \frac{0+1}{2} = \boxed{0.5}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$$

$$f(x_0) = f(0.5) = (0.5)^3 - (0.5)^2 + 2(0.5) - 1$$

$$= 0.125 - 0.25 + 1 - 1$$

$$\boxed{f(x_0) = -0.125}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

$$f'(x_0) = f'(0.5) = 3(0.5)^2 - 2(0.5) + 2$$

$$= \boxed{1.75}$$

Date No.

$$\therefore X_1 = X_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_1)}$$

$$= 0.5 - \frac{-0.125}{1.75}$$

$$X_1 = \boxed{0.5714}$$

$$X_2 = X_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$X_2 = 0.5714 - \frac{-0.14}{1.836}$$

$$= 0.5714 + 0.07625$$

$$\boxed{X_2 = 0.647}$$

$$X_3 = 0.647 - \frac{0.1462}{1.9618}$$

$$\boxed{X_3 = 0.572}$$

$$X_4 = X_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$= 0.572 - \frac{0.004}{1.8775}$$

$$= 0.572 - 0.002$$

$$\boxed{X_4 = 0.57}$$

$$X_5 = X_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)}$$

$$f(x_4) = (0.57)^3 - (0.57)^2 + 2(0.57) - 1$$

$$= 0.185193 - 0.3249 + 1.14 - 1$$

$$\boxed{= 0.000293}$$

$$f'(x_4) = 3(0.57)^2 - 2(0.57) + 2$$

$$= 0.9747 - 1.14 + 2$$

$$\boxed{= 1.8347}$$

$$\therefore X_5 = \boxed{0.57}$$

$$\therefore |X_5 - X_4| \leq \epsilon$$

∴ قيمة الحل هو $\boxed{0.57}$