المحاضرة السابعة / الفصل الثالث

جذور معادلات متسلسلات القوى

Roots of Polynomial Equations

Introduction مقدمة

يمكن استخدام الطرائق في الفصل السابق لحساب قيمة الجذر الحقيقي للدالة العامة $f(x)$ ذات المعاملات العددية حيث يمكن التعبير عن متسلسلة القوى $P_n(x)$ للمتغير X من الدرجة n بطرق مختلفة منها

١- الصورة العامة (General Form)

ان الصيغة العامة لمتعدد الحدود من الدرجة n للمتغير X هي

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x^1 + a_n$$

حيث ان

a_i تمثل الثابت i ولقيم n و .... و١و٠ = i و n عدد صحيح موجب يمثل درجة متعددة (كثيرة) الحدود .

٢- طريقة الضرب الشبكي

(Nested Nalti Placation

يمكن التعبير عن $P_n(x)$ بطريقة الضرب الشبكي كالاتي

$$P_n(x) = [\{(a_0 x + a_1)x + a_2\} x + \cdots]x + a_n$$

مثال

عبر عن متعددة الحدود التالية بصيغة الضرب الشبكي:

$$P_4(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9$$

الحل

$$P_4(x) = [\{(5x - 2)x + 3\}x + 0]x - 9$$

توضيح

$-9 = a_n$ ، $3 = a_3$ ، $-2 = a_1$ ، $a_0 = 5$

٣- طريقة مجموعة متسلسلات القوى الجزئية

يمكن تعريف مجموعة متسلسلات القوى الجزئية كالاتي

$$P_0(x) = a_0$$

$$P_1(x) = x P_0(x) + a_1 = a_0 x + a_1$$

$$P_2(x) = x P_1(x) + a_2 = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

$$P_3(x) = x P_2(x) + a_3 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = x P_{n-1}(x) + a_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

مثال

عبر عن متسلسلة القوى التالية بصيغة متسلسلة القوى الجزئية

$$P_4(x) = \underset{a_0}{8}x^4 - \underset{a_1}{6}x^3 + \underset{a_2}{5}x^2 - \underset{a_3}{2}x + \underset{a_4}{5}$$

ثم أحسب $P_0(2), P_1(2), P_2(2), P_3(2), P_4(2)$

الحل

$$P_0(x) = a_0 = 8$$

$$P_1(x) = x P_0(x) + a_1 = 8x - 6$$

$$P_2(x) = x P_1(x) + a_2 = x(8x-6) + 5$$

$$= 8x^2 - 6x + 5$$

$$P_3(x) = x P_2(x) + a_3 = x(8x^2 - 6x + 5) - 2$$

$$= 8x^3 - 6x^2 + 5x - 2$$

$$P_4(x) = x P_3(x) + a_4 = x(8x^3 - 6x^2 + 5x - 2) + 5$$

$$= 8x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 2x + 5$$

وعندما $x = 2$

$$P_0(2) = 8$$

$$P_1(2) = 10$$

$$P_2(2) = 25$$

$$P_3(2) = 48$$

$$P_4(2) = 101$$

بعض نظريات جذور متسلسلات القوى متعددة الحدود

نظرية الباقي

إذا قسمت متسلسلة القوى $P_n(x)$ على المقدار الخطي $(x-\alpha)$ فأن متسلسلة القوى الناتجة لحاصل القسمة هي من الدرجة $(n-1)$ والباقي الثابت (R) أي ان

$$P_n(x) = (x-\alpha)\underbrace{Q_{n-1}}_{\text{الناتج}}(x) + \underbrace{R}_{\text{الباقي}}$$

مثال اختبر $\boxed{x=4}$ او جذور للمعادلة

$$\boxed{P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 8}$$

حسب نظرية الباقي

الحل عندما $x=4 \Leftarrow x-4$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 4 \\
\hline
x - 4 & \cancel{x^3} - 3x^2 + 8 \\
\text{بالطرح} & \cancel{\mp x^3} \pm 4x^2 \\
\hline
 & \cancel{x^2} + 8 \\
\text{بالطرح} & \cancel{\mp x^2} \pm 4x \\
\hline
 & \cancel{4x} + 8 \\
\text{بالطرح} & \cancel{\mp 4x} \pm 16 \\
\hline
 & +24 = R \neq 0
\end{array}
$$

$\therefore$ $x=4$ ليس جذر للمعادلة

H.W. $\underline{\underline{x=1}}$

Date No.

٣) نظرية العامل

اذا كان الباقي (R) يساوي الصفر عند قسمة $P_n(x)$ على $(x-\alpha)$ فأن $(x-\alpha)$ هو عامل $P_n(x)$

مثال

بين فيما اذا كان $x=1, -2, 4$ جذور للمعادلة

$$P_3(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

الحل

$x=1 \Rightarrow x-1$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 4 \\ \hline x-1 & \cancel{x^3} - \cancel{x^2} - 4x + 4 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \\ \hline \text{بالطرح} & -\cancel{4x} \pm \cancel{4} \\ & \pm \cancel{4x} \mp 4 \\ \hline \text{بالطرح} & 0 = R \end{array}$$

∴ $\boxed{x-1}$ هو جذر للمعادلة

عندما $x=-2 \Rightarrow \boxed{x+2}$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 3x + 2 \\ \hline x+2 & \cancel{x^3} - x^2 - 4x + 4 \\ & \mp \cancel{x^3} \mp 2x^2 \\ \hline \text{بالطرح} & -\cancel{3x^2} - 4x \\ & \pm \cancel{3x^2} \pm 6x \\ \hline \text{بالطرح} & \cancel{+2x} \cancel{+4} \\ & \mp \cancel{2x} \mp 4 \\ \hline \text{بالطرح} & 0 = R \end{array}$$

∴ هو جذر للمعادلة حسب نظرية العامل

٣ نظرية (ديكارت)

ان عدد الجذور الموجبة لمتعددة الحدود $P_n(x)=0$ ذات المعاملات الحقيقية (α_i) لا يزيد عن عدد التغير في اشارات المتسلسلة $P_n(x)$ ، وان عدد الجذور السالبة لا يزيد عن عدد التغير في اشارات معاملات $P_n(-x)$.

مثال

جد عدد الجذور السالبة والموجبة للمعادلة التالية

$$P_5(x) = \overset{+}{4x^5} \overset{-}{-} 2x^4 \overset{-}{-} 9x^3 \overset{+}{+} 6x^2 \overset{+}{+} 8x \overset{-}{-} 4$$

1 2 3

عدد الجذور الموجبة (3)

$$P_5(-x) = -4x^5 - 2x^4 + 9x^3 + 6x - 8x - 4$$

1 2

عدد الجذور السالبة $\boxed{2}$

و مجموع عدد الجذور = 5 الذي يمثل اعلى اس لمتغير متعددة الحدود

مثال

جد عدد الجذور السالبة والموجبة لمتعددة الحدود

$$f(x) = x^2 + x - 7$$

الحل

$$f(x) = x^2 + x - 7$$

1

عدد الجذور الموجبة = 1

$$f(-x) = +x^2 - x - 7$$

1

عدد الجذور السالبة = 1

مجموع الجذور (2)