3-5 طريقة نيوتن – رافسون لمتعدد الحدود

تعتبر طريقة نيوتن – رافسون ملائمة لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ عندما تكون f متعددة حدود ، وذلك لوجود خوارزمية بسيطة لحساب قيمة متعددة حدود ومشتقاتها في أيه نقطة (α) لتكن :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.5)$$

تمثل متعددة حدود من الدرجة n ، ومعاملاتها أعداد حقيقية، عند قسمة $f(x)$ على $(x-\alpha)$، نحصل على متعددة حدود من الدرجة $(n-1)$ مضافاً إليها باقي التقسيم.

$$\frac{f_{(x)}}{x-\alpha} = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} + \frac{b_n}{x-\alpha}$$

وبصيغة أخرى

$$f(x) = (x-\alpha)(b_n x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + b_n \quad \ldots\ldots \quad (3.6)$$

ولتطبيق طريقة نيوتن – رافسون لإيجاد جذور المعادلة متعددة الحدود $f(x) = 0$ الموصوفة بالعلاقة (3–5) نتبع الخطوات التالية

1- نختار قيمة أولية x_0 لجذر المعادلة .

2- نحسب القيمتين b_n, c_{n-1} مما يأتي

$$c_0 = b_0 = a_0$$

$$b_k = a_k + x_0b_{k-1} \;\;,\;\; k = 1,2,\ldots\ldots$$

$$c_k = b_k + x_0c_{k-1} \;,\; k = 1,2,\ldots,n-1$$

نحسب القيمة التقريبية الأفضل للجذور من العلاقة :

$$x_1 = x_0 - \frac{b_n}{c_n}$$

3- نكرر الخطوتين (3,2) لحين الحصول على الجذر بالدقة المطلوبة ويمكن تكوين جدول كالآتي لحساب الخطوات :

جدول رقم (3) خطوات القسمة التركيبية

a_j	a_0	a_1	a_2	......	a_{n-1}	a_n
x_0b_j	x_0b_0	x_nb_1	x_0b_{n-2}	......	x_nb_{n-2}	x_0b_{n-2}
	b_0	b_1	b_2	......	b_{n-1}	b_n
x_0c_j		x_0c_0	x_0c_1	......	x_0c_{n-2}	
	c_0	c_1	c_2	......	c_{n-1}	

وتسمى هذه الطريقة بالقسمة التركيبية (Synthetic Division)

مثال : (3 - 6)

احسب كلاً من $P_4(2)$ وخارج القسمة $P_3(x)$ إذا كانت

$$P_4(x) = 3x^4 - 6x^3 + 9x - 5$$

بأسلوب القسمة التركيبية

الحل :

نرتب المعاملات من معامل أعلى أس الى الحد الثابت في مقر الحدود مع الأخذ بنظر الاعتبار اشارة المعامل وهذا ماوصف في الصف الأول ، ثم نضرب $(2\times3=6)$ وتوضع في الصف الثاني العمود الثاني ونجمع القيم حيث تصبح $(-6+6=0)$ وتكرر هذه العملية ومنها نحصل على الجدول التالي :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & -6 & 0 & 9 & -5 \\
 & & 6 & 0 & 0 & 18 \\
\hline
2 & & 0 & 0 & 9 & \boxed{13 = P_4(2)} \\
 & 3 & & & &
\end{array}$$

ومنه فان ناتج القسمة

$$P_3(x) = 3x^3 + 9$$

وبقيمة الى $P_4(2)$ مساوية الى 13

مثال (7-3):

أحسب قيمة جذر المعادلة في المثال السابق القريبة من $x = -1$

الحل : باتباع خطوات القسمة التركيبية ، نحصل على

	3	−6	0	9	−5
$X_0 = -1$		−3	9	−9	0
	3	−9	9	0	$\boxed{-5}$
$f'(x_0)$ نحصل المشتقة -1		−3	12	−21	
	3	−12	21	$\boxed{-21}$	

ومنها فان :

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{-5}{-21} = 0.2380$$

	3	−6	0	9	−5
$x_0 \times$ نطرح $X_1 = -1.2380$		−3.714	12.025	−14.888	7.289
	3	−9.714	12.025	−5.888	$\boxed{2.289}$
		−3.714	16.623	−35.467	
	3	−13.428	28.648	$\boxed{-41.355}$	

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.055$$

وهكذا حتى الحصول على الجذر بالدقة المطلوب أي لثلاث أو أربع مراتب عشرية أو بخطأ معين مثلاً $\varepsilon = 0.001$

تمارين الفصل الثالث

X^2

س1 : هل إن $x = -2$ جذراً للمعادلة التالية :

$$2x^3 - x2 - 10x + 8 = 0$$

س2 : عبر عن $P_5(x)$ التي معاملات حدودها :

$$a_0 = -2 \,,\, a_1 = 5 \,,\, a_2 = 0 \,,\, a_3 = 2 \,,\, a_4 = 0 \,,\, a_5 = 1$$

بطريقة :

1- الضرب الشوكي ثم أحسب $P_5(4)$

2- مجموعة متسلسلات القوى الجزيئة ثم أحسب $P_5(7)$

3- أحسب $P_5(3)$ بالتعويض المباشر

4- أحسب $P_5(3)$ بالقسمة التركيبية

س3 : أذا كانت

$$P_4(x) = 2x^4 - 3x^2 + x + 9$$

فأحسب كلاً من 1- $P_4(-2)$ وخارج القسمة $P_3(x)$ ومنها $P_3(1)$ وخارج القسمة $P_2(x)$

2- عدد الجذور السالبة والموجبة لكل من $P_4(x)$ ، $P_3(x)$

س4 : أحسب البواقي الثلاث R_1 , R_2 , R_3 وخارج القسمة $P_2(x)$ للقيم $x = 3$, $x = -2$, $x = -1$ من متسلسلة القوى

$$P_5(x) = x^5 - 4x^3 + 3x - 12$$

س5 : أحسب جذور المعادلة

$$P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6$$

القريبة من $x = -2$ بالقسمة التركيبية

س6 : أكتب أيعاز لحساب قيم متعددة الحدود التالي :

$$P_2(x) = 2x^2 + x - 1$$

ولقيم $x = 4 , 8$

س7 : أذا كان لدينا متعدد الحدود التالي :

$$f(x) = 5x^3 + 10x + 6$$
$$g(x) = 3x + 1$$

فاقسم متعدد الحدود $f(x)$ على $g(x)$ باستخدام أسلوب القسمة الطويلة ، ثم أكتب برنامج لحل النظام .

س8 : أوجد قيمة دالة متعددة الحدود من الدرجة الرابعة عندما $(x = 3)$ وجذورها

$$f(x) = 5x^4 + 9x^3 - 2x^2 + 8$$

س9 : اكتب أيعاز لضرب متعدد الحدود التالية ثم قسم الناتج على متعدد الحدود K

$$z = x^3 + 2x^2 + 4$$
$$k = 2x + 1$$

س10 : أرسم دالة متعددة الحدود التالية من الدرجة الثالثة :

$$y = f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$$

وضمن المجال $-5 \le x \le 2$ باستخدام (101) من النقاط وبمعنى (100 خط تقريبي)