المحاضرة التاسعة

الفصل الرابع/الفروق المنتهية

Finite differences

سنتناول في هذا الفصل أنواع من الفروق المنتهية مع جداولها

وهي الاساس الذي نشأت عليه نظرية **التحليل العددي**

الفروق المنتهية

ان الدالة المستخدمة هنا $y = f(x)$ وهي دالة متقطعة

متساوية الابعاد على النحو التالي

x_0 ; $y_0 = f(x_0) = f_0$

$x_1 = x_0 + h$; $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h) = f_1$

$\vdots$

$x_n = x_0 + nh$; $y_n = f(x_n) = f(x_0 + nh) = f_n$

توجد ثلاثة أنواع من الفروق المنتهية هي :-

Ascending differences ١- الفروق الامامية

descending differences ٢- الفروق الخلفية

Central differences ٣- الفروق المركزية الوسطى

Ascending differences ١- الفروق الامامية

يرمز لها بالرمز Δ وتعرف بالمعادلة

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$= f(x_1) - f(x_0)$$

$$\boxed{\Delta y_0 = y_1 - y_0}$$

وتسمى بالفروق الأمامية الأولى ونحصل على الفروق الثانية

بأخذ الفرق للفروق الاولى

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$

$$= y_2 - y_1 - y_1 + y_0$$

$$= y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$$

ويمكن التعبير عن الفروق من الرتبة K كما يلي

$$\Delta^{k} y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

وبصورة عامة

$$\Delta^{n} y_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y_{n-i}$$

جدول الفروق الامامية

يمكن الحصول على الفروق الأمامية من أية مرتبة من طرح الفروق العليا من الفروق السفلى في العمود المجاور الى اليسار ويلاحظ ان موقع الفروق الفردية ($\Delta^1, \Delta^3, \Delta^5$) يكون مقابل منتصف المسافة بين قيم النقاط الأولية في حين ان الفروق الزوجية ($\Delta^2, \Delta^4, \Delta^6$) تكون باستقامة واحدة مقابل القيم الاولية.

جدول الفروق الأمامية

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
			$\Delta^2 y_0$		
x_1	y_1				
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
			$\Delta^2 y_1$		
x_2	y_2				
		Δy_2			
x_3	y_3				
$\vdots$		Δy			
x_{n-3}	y_{n-3}				
x_{n-2}	y_{n-2}				
			$\Delta^2 y_{n-1}$		
x_{n-1}	y_{n-1}				
		Δy_{n-1}			
x_n	y_n				

مثال

أكتب جدول الفروق الأمامية للدالة التالية

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 3$$

علماً ان $X = -1, 0, 1, 2, 3$

الحل

نجد قيم الدالة بمعلومية المتغير X حيث ترتب بالجدول التالي للفروق

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-1	-1				
		4			
0	3		-8		
		-4		12	
1	-1		4		24
		0		36	
2	-1		40		
		40			
3	39				

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$= 3 - (-1) = 4$$

descending differences الفروق الخلفية

يرمز للفروق الخلفية بالرمز ∇ ويعرف بالمعادلة التالية

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

ان الفروق الخلفية الاولى

$$\nabla y_{-1} = y_{-1} - y_{-2}$$

$$\nabla y_0 = y_0 - y_{-1}$$

$$\vdots$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

أما الفروق الخلفية الثانية فهي

$$\nabla^2 y_0 = \nabla(\nabla y_0)$$

$$= y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}$$

$$\vdots$$

$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

وبصورة عامة

$$\nabla^n y_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} y_{i-j}$$

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$	$\nabla^6 y_i$
x_{-6}	y_{-6}						
		∇y_{-5}					
x_{-5}	y_{-5}		$\nabla^2 y_{-4}$				
		∇y_{-4}		$\nabla^3 y_{-3}$			
x_{-4}	y_{-4}		$\nabla^2 y_{-3}$		$\nabla^4 y_{-2}$		
		∇y_{-3}		$\nabla^3 y_{-2}$		$\nabla^5 y_1$	
x_{-3}	y_{-3}		$\nabla^2 y_{-2}$		$\nabla^4 y_{-1}$		$\nabla^6 y_0$
		∇y_{-2}		$\nabla^3 y_{-1}$		$\nabla^5 y_0$	
x_{-2}	y_{-2}		$\nabla^2 y_{-1}$		$\nabla^4 y_0$		
		∇y_{-1}		$\nabla^3 y_0$			
x_{-1}	y_{-1}		$\nabla^2 y_0$				
		∇y_0					
x_0	y_0						

مثال

كون جدول للفروق الخلفية للبيانات التالية

x_i	3	6	9	12	15
y_i	42	40	39	36	30

الحل

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
3	42				
		-2			
6	40		1		
		-1		-3	
9	39		-2		2
		-3		-1	
12	36		-3		
		-6			
15	30				

مثال

إحسب الفروق الخلفية الأولى للدالة التالية:

$$y = f(x) = x^2$$

الحل

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$= x^2 - (x-h)^2 \Leftarrow$$ نفتح التربيع

$$= \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2xh - h^2$$

$$\boxed{= 2xh - h^2}$$

مثال

إحسب الفروق الأمامية الأولى للدالة

$$y = f(x) = x^2$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$= (x+h)^2 - x^2$$

$$= \cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}$$

$$\boxed{= 2xh + h^2}$$